

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَجِّلْ فَرَجَهُمْ



ریاضی (۱)

کلیه رشته‌ها

شاخه فنی و حرفه‌ای و کاردانش

پایه دهم دوره دوم متوسطه





وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی



- نام کتاب:** ریاضی (۱) - ۲۱۰۱۴۱
- پدیدآورنده:** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
- مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:** دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش
- شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:** شهرناز بخشعلی‌زاده، ناصر بروجردیان، سوسن پناهنده، زین‌العابدین دهقانی ابیانه و زیبا فانی (اعضای گروه تألیف) - افسانه حجتی طباطبایی (ویراستار ادبی)
- مدیریت آماده‌سازی هنری:** اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
- شناسه افزوده آماده‌سازی:** فریبرز سیامک‌نژاد (طراح گرافیک) - عبدالحمید سیامک‌نژاد (طراح جلد) - امیرحسین محبتیان (صفحه‌آرا) - بهنام خیامی (تصویرگر) - امیرحسین سیامک‌نژاد و منوچهر احمدی (رسامی و فرمول چینی)
- نشانی سازمان:** تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهیدموسوی)
تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وب‌گاه: www.irtext book.ir و www.chap.sch.ir
- ناشر:** شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) - تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰
صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
- چاپخانه:** شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
چاپ ششم ۱۴۰۰
- سال انتشار و نوبت چاپ:**

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.



ملت شریف ما اگر در این انقلاب بخواهد پیروز شود باید دست از آستین
برآرد و به کار بپردازد. از متن دانشگاه‌ها تا بازارها و کارخانه‌ها و مزارع و
باغستان‌ها تا آنجا که خودکفا شود و روی پای خود بایستد.
امام خمینی «قُدَسِ سِرَّة»

پودمان اول - نسبت و تناسب

- ۱-۱- نسبت‌های مستقیم ۸
- ۲-۱- نسبت‌های معکوس ۲۴
- ۳-۱- واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی: طول ۳۲
- ۴-۱- واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی: جرم ۴۲

پودمان دوم - درصد و کاربردهای آن

- ۱-۲- محاسبه ذهنی درصد ۴۸
- ۲-۲- درصد‌های بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱ ۵۴
- ۳-۲- درصد تغییر ۶۰

پودمان سوم - معادله‌های درجه دوم

- ۱-۳- مفهوم معادله‌های درجه دوم ۶۶
- ۲-۳- رابطه‌های غیر خطی ۷۰
- ۳-۳- روش‌های حل معادله‌های درجه دوم ۷۸

پودمان چهارم - توان‌رسانی به توان عددهای گویا

- ۱-۴- مفهوم توان‌رسانی به توان عددهای گویا ۹۰
- ۲-۴- ریشه‌گیری عددهای حقیقی ۹۸

پودمان پنجم - نسبت‌های مثلثاتی

۱۱۶	۱-۵- تشابه
۱۲۲	۲-۵- تانژانت یک زاویه
۱۳۰	۳-۵- سینوس یک زاویه
۱۳۶	۴-۵- کسینوس یک زاویه



به گفته بسیاری از دانشمندان، ریاضی علمی شیرین و کاربردی است و تاریخ ریاضی نشان داده که حل مسائل عملی محیط پیرامونی موجب توسعه ریاضیات شده است. هدف اصلی ریاضی، حل مسائلی است که انسان در زندگی روزمره و عملی با آنها روبه‌رو است. شما با دیدن شنای شناگران، نمی‌توانید شنا یاد بگیرید بلکه برای شناگر شدن باید وارد آب شوید و خودتان مستقیماً عمل کنید.

یادگیری ریاضی صرفاً خواندن و شنیدن مفاهیم ریاضی نیست؛ بلکه ریاضیات علمی معنادار است و تا زمانی که خود شما درگیر حل مسائل نشوید نمی‌توانید ریاضی را یاد گرفته و از آن استفاده کنید. طراحی این کتاب به گونه‌ای است که در یک متن داستان‌گونه، مسئله‌ای مطرح می‌شود و شما با انجام فعالیت‌هایی که در ادامه مسئله آمده است به مفهوم ریاضی مورد نظر می‌رسید.

سعی کنید تمامی این عملیات را انجام دهید و مطمئن باشید خواهید توانست مفاهیم را به خوبی یاد گرفته و نهایتاً مسئله‌های کتاب را حل کنید.

مفاهیم ریاضی در این کتاب در ارتباط با هم بوده و به هم وابسته‌اند. سعی شده است مثال‌ها و تمرین‌هایی که در کتاب آمده است کاربردی بوده و با محیط پیرامونی زندگی ما مرتبط باشند. آنچه که مسلم است ریاضیات زبان علم است و در تمام متن زندگی ما حضور دارد. یادگیری ریاضی شما را قادر می‌سازد تا توانایی تجزیه و تحلیل مسئله‌هایی را که با آنها برخورد می‌کنید، داشته باشید و خواهید دید که چگونه می‌توانید آموخته‌های خود را به کار برده و مسئله‌های مهمی را حل کنید.

در این کتاب علاوه بر تأکید بر این جنبه ریاضی، به تأثیر فناوری در یادگیری ریاضی نیز توجه شده است. محیط و ابزار فناوری از جمله استفاده از ماشین حساب و نرم‌افزارهای پویا مانند جئوجبرا، این امکان را فراهم می‌سازد تا هنرجو فرصت درک شهودی، رشد مهارت‌های تفکر مانند حدسیه و فرضیه‌سازی، الگویابی و غیره را پیدا کند. بنابراین به کارگیری فناوری از اصولی است که در تألیف این کتاب به آن توجه شده است.

در خاتمه برای آنکه کتاب برای شما بهتر قابل استفاده باشد، از نظر برخی از هنرآموزان محترم استفاده شده است که بدین وسیله از ایشان تشکر و قدردانی می‌گردد.



پودمان اول

نسبت و تناسب



باستان‌شناسان چگونه از ریاضی استفاده می‌کنند؟

در سال ۲۰۰۱ میلادی، باستان‌شناسان مجموعه‌ای یک تمساح ماقبل تاریخ به طول یک متر و هشتاد سانتی‌متر را کشف کردند. با استفاده از نسبت و تناسب، آنها توانستند طول این تمساح را ۱۲ متر برآورد کنند.

منبع: National Geography Mag

سال تحصیلی جدید، مسئله‌های جدید، راه‌حل‌های جدید

دبیر ریاضی وارد کلاس شد و پس از معرفی خود گفت: «سال جدید تحصیلی بر همه شما مبارک باد! امیدوارم امسال، سالی پر از موفقیت برای شما باشد.» سپس از لزوم درس خواندن و یادگیری ریاضی برایمان گفت و در آخر، اضافه کرد: «امسال روش یادگیری متفاوتی داریم. شما خودتان باید مفاهیم ریاضی را در ذهنتان بسازید؛ این کار را هم به کمک یکدیگر و با اجرا کردن فعالیت‌هایی که برایتان در نظر گرفته‌ایم، انجام خواهید داد.» پس از اینکه او قوانین کلاس را برایمان توضیح داد و هنرجویان خودشان را معرفی کردند و دلیل انتخاب شاخه فنی و حرفه‌ای یا کاردانش را برای ادامه تحصیل توضیح دادند، گفت: «اجازه بدهید کارمان را شروع کنیم.»

شما در سال‌های گذشته با اندازه‌گیری آشنا شده‌اید. در ادامه، دو گیره کاغذ در اندازه‌های مختلف را به ما نشان داد و گفت: «طول گیره بزرگ $\frac{1}{5}$ برابر طول گیره کوچک است.» سپس به هر یک از هنرجویان به طور تصادفی یک گیره داد و گفت: «برای جلسه آینده طول و عرض کتاب ریاضی، طول و عرض یک کاغذ A4، و طول چند شیء دیگر را در منزل با گیره‌ای که دارید اندازه بگیرید.» ظاهراً کاری ساده بود که در دوره ابتدایی هم آن را انجام داده بودیم. با خودم گفتم: اگر همه تکالیف ریاضی امسال به همین سادگی باشند، نمره ریاضی ام ۲۰ خواهد شد! اما در خانه وقتی خواستم اندازه‌گیری‌ها را انجام دهم، متوجه شدم که گیره ام را در مدرسه جا گذاشته‌ام. به علی زنگ زدم تا ببینم او می‌تواند کمکی کند، ولی متوجه شدم اندازه گیره او با اندازه گیره من متفاوت است. البته علی راه‌حلی برای مشکل من پیشنهاد کرد.





فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا متوجه شوید راه‌حل علی چه بوده است.

۱) در جدول زیر، ستون سمت چپ اندازه‌ای را بر حسب گیره کوچک و ستون سمت راست همان اندازه را بر حسب گیره بزرگ نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

x (طول بر حسب گیره کوچک)	y (طول بر حسب گیره بزرگ)	$\frac{x}{y}$
۳		
۶		
۹		

۲) با توجه به جدول، جاهای خالی زیر را پر کنید.

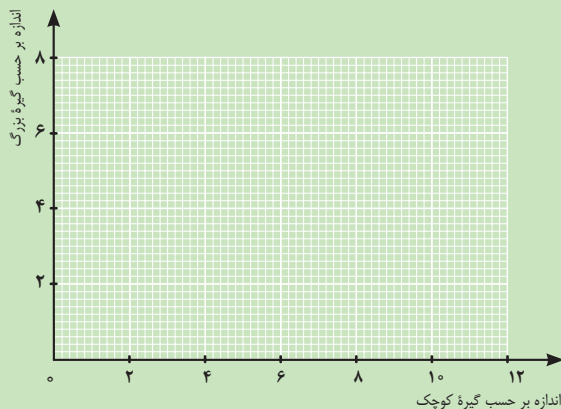
$$y = \dots \times x$$

مقدار طول شیء بر حسب گیره بزرگ برابر است با

$$x = \dots \times y$$

مقدار طول شیء بر حسب گیره کوچک برابر است با

۳) در زیر، نموداری رسم کنید که رابطه بین اندازه بر حسب گیره بزرگ و اندازه بر حسب گیره کوچک را نشان دهد.



۴) اگر طول کتاب $5\frac{1}{2}$ و عرض آن $3\frac{2}{3}$ گیره بزرگ باشد، به کمک نمودار بالا و رابطه‌های به دست آمده در (۲) طول و عرض کتاب را بر حسب گیره کوچک پیدا کنید.

.....

فعالیت صفحه قبل نشان می‌دهد که هرگاه دو مقدار با ضریب ثابتی با یکدیگر متناسب باشند، با استفاده از نمودار رابطه بین آنها می‌توان با داشتن مقدار یکی، مقدار دیگری را بدون ضرب یا تقسیم به دست آورد. نسبت‌های $1/5$ به 1 یا 3 به 2 را می‌توان با عدد کسری $\frac{3}{2}$ نشان داد. با توجه به جدول صفحه قبل می‌توانیم بفهمیم که در مقابل هر 2 گیره بزرگ، 3 گیره کوچک و در مقابل هر 4 گیره بزرگ، 6 گیره کوچک داریم. این ارتباط را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = K$$

$$6 = 4K \text{ و } 3 = 2K \text{ یا}$$

K نسبت طول گیره بزرگ به طول گیره کوچک را نشان می‌دهد که آن را ضریب تبدیل واحد یا در این فعالیت ضریب تبدیل طول با واحد گیره بزرگ به طول با واحد گیره کوچک می‌نامند.

نتیجه



در حالت کلی، دو نسبت a به b و c به d مساوی‌اند، هرگاه برای یک عدد مانند K ، داشته باشیم:

$$c = Kd \quad \text{و} \quad a = Kb \quad \text{یا} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = K$$

مثال ۱

الف) 250 سانتی‌متر چند متر است؟

ب) 34 سانتی‌متر چند متر است؟

پ) $0/01$ سانتی‌متر چند متر است؟

اگر طول شیئی برابر A متر باشد، همین طول برابر $100A$ سانتی‌متر است. نسبت $\frac{A}{100A} = \frac{1}{100}$ ضریب تبدیل سانتی‌متر به متر است. برای داشتن درک بهتر به تساوی ظاهری زیر دقت کنید.

$$\text{متر} = \text{سانتی‌متر} \times \frac{\text{متر}}{\text{سانتی‌متر}}$$

این تساوی به معنای آن است که اگر نسبت طول بر حسب متر به طول بر حسب سانتی متر را تشکیل دهیم، ضریبی به دست می‌آید که با ضرب آن در طول بر حسب سانتی متر، همان طول بر حسب متر به دست می‌آید. پس داریم:

الف) 250 سانتی متر برابر با $2/5$ متر است زیرا: $\frac{1}{100} \times 250 = 2/5$

ب) 34 سانتی متر برابر است با $0/34$ متر است زیرا: $\frac{1}{100} \times 34 = 0/34$

پ) $0/01$ سانتی متر برابر با $0/0001$ متر است زیرا: $\frac{1}{100} \times 0/01 = 0/0001$

مثال ۲



الف) 250 متر چند سانتی متر است؟

ب) $0/4$ متر چند سانتی متر است؟

پ) $\frac{4}{7}$ متر چند سانتی متر است؟

در این حالت، باید معکوس نسبت در مثال (۱) را حساب کنیم. اگر طول جسمی برابر A متر باشد، همین طول برابر $100A$ سانتی متر است. نسبت $\frac{100A}{A} = 100$ ضریب تبدیل متر به سانتی متر است.

(برای درک بهتر به تساوی ظاهری **سانتی متر = متر \times $\frac{\text{سانتی متر}}{\text{متر}}$** توجه کنید.) پس داریم:

الف) $100 \times 250 = 25,000$

ب) $100 \times 0/4 = 40$

پ) $100 \times \frac{4}{7} = \frac{400}{7}$

مثال‌های ۱ و ۲ نشان می‌دهند که در محاسبه ضریب تبدیل دو واحد به یکدیگر، اینکه کدام واحد را به کدام واحد می‌خواهیم تبدیل کنیم، مهم است و اگر جای واحدها را با هم عوض کنیم، ضریب تبدیل معکوس می‌شود. مثلاً، ضریب تبدیل متر به سانتی‌متر، ۱۰۰ است ولی ضریب تبدیل سانتی‌متر به متر، $\frac{1}{100}$ است.

مثال ۳

برای تهیه ۷ لیوان شربت، ۵ لیوان آب را به ۲ لیوان شربت غلیظ اضافه می‌کنیم. اگر بخواهیم با ۶ لیوان شربت غلیظ، شربتی با همان مقدار شیرینی درست کنیم، چند لیوان آب باید به آن اضافه کنیم؟ این مسئله را می‌توانیم به سه روش حل کنیم.

روش رسم شکل: اگر در برابر ۲ لیوان (واحد) شربت غلیظ، ۵ لیوان (واحد) آب نیاز داشته باشیم، به معنای آن است که در برابر هر ۲ واحد شربت غلیظ، به ۵ واحد آب نیاز داریم.

شربت غلیظ	۱	۱			
آب	۱	۱	۱	۱	۱

بنابراین، در برابر ۶ لیوان شربت غلیظ (که ۲ واحد ۳ تایی است)، به ۱۵ لیوان آب (که ۵ واحد ۳ تایی است) نیاز داریم؛ یعنی:

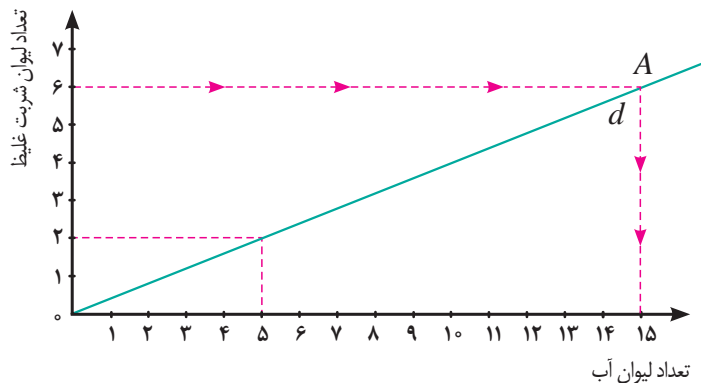
شربت غلیظ	۳	۳			
آب	۳	۳	۳	۳	۳

روش رسم نمودار: رابطه این دو کمیت^۱ را می‌توان با نمودار نشان داد.

برای رسم نمودار ابتدا دو نقطه $\left[\begin{smallmatrix} \circ \\ \circ \end{smallmatrix} \right]$ (مبدأ) و $\left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$ را به هم وصل می‌کنیم. خط d نموداری است که رابطه بین این دو کمیت را نشان می‌دهد.

سپس از نقطه‌ای به عرض ۶ روی محور عمودی، خطی موازی با محور افقی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه A قطع کند. از نقطه A خطی موازی با محور عمودی رسم می‌کنیم. طول محل برخورد این خط با محور افقی، تعداد لیوان‌های آب مورد نیاز را نشان می‌دهد.

۱- مفاهیمی مانند وزن و جرم و بار الکتریکی و فشار هوا و نظایر آنها را کمیت‌های فیزیکی و مفاهیمی مانند طول و مساحت و حجم و نظایر آنها را کمیت‌های هندسی می‌نامند.



روش عملیات جبری: با توجه به اینکه تعداد لیوان های شربت غلیظ و آب، کمیت های متناسب اند، این تبدیل را می توان به شکل زیر نیز در نظر گرفت:

$$\frac{5}{2} = \frac{x}{6} = K$$

$$x = 6K = 6 \times \frac{5}{2} = 15 \quad \text{پس :}$$

یا

تعداد لیوان آب = تعداد لیوان شربت غلیظ × تعداد لیوان آب
تعداد لیوان شربت غلیظ

کاردکلاس ۱



۱) آیا دو نسبت ۴۲ به ۸۸ و ۶ به ۱۱ دو نسبت مساوی اند؟

بله؛ K برابر است با

خیر؛ نسبت ۶ به ۱۱ برابر است با نسبت ۴۲ به و K برابر است با

۲) آیا دو نسبت ۲ به ۵ و ۱۰ به ۲۵ دو نسبت مساوی اند؟

بله؛ K برابر است با

خیر؛ نسبت ۲ به ۵ برابر است با نسبت به



۳) در یک روزنامه عکس ها با ابعاد 5×6 چاپ می شوند. در مرحله صفحه آرایی تصمیم گرفته شد عکس ها با طول ۱۲ چاپ شوند. عرض عکس ها چقدر باید باشد؟

.....
.....

کمیت‌های متناسبی که تا اینجا بررسی کردیم، همگی از یک جنس و یک واحد بودند. برای مثال، نسبت طول به عرض یک پنجره، نسبت بین دو طول است و هر دو با واحد یکسان متر یا سانتی‌متر قابل اندازه‌گیری هستند یا نسبت مخلوط کردن شربت غلیظ و آب، نسبت بین دو حجم است و هر دو بر حسب حجم یک لیوان قابل اندازه‌گیری هستند. ولی در زندگی روزمره با کمیت‌های متناسبی سر و کار داریم که از یک جنس نیستند یا واحدهای اندازه‌گیری آنها یکی نیست. مثلاً برای ماشینی که با سرعت ثابت در حال حرکت است، مسافت پیموده شده با زمان سپری شده متناسب است. در محاسبه نسبت بین مسافت طی شده و زمان سپری شده، **مسافت** از جنس طول است و با واحدهایی مانند **متر** اندازه‌گیری می‌شود؛ در حالی که **زمان** از جنس دیگری است و با واحدهایی مانند **ثانیه** اندازه‌گیری می‌شود. مثالی دیگر، قیمت میوه‌هاست که متناسب با وزن آنهاست. در محاسبه نسبت بین قیمت میوه‌ها به وزن آنها، قیمت از جنس **پول** است و با واحدهایی مانند **تومان** اندازه‌گیری می‌شود؛ در حالی که **وزن** از جنس **نیرو** است و با واحدهایی مانند **کیلوگرم** اندازه‌گیری می‌شود. در این حالت‌ها، مقدار نسبت، به واحدهای اندازه‌گیری برای هر کدام از کمیت‌های انتخاب شده، بستگی دارد.

در میدان تره‌بار، هر ۳ کیلوگرم سیب‌زمینی ۳۰۰۰ تومان است.



فعالیت ۲



۱- گرچه کیلوگرم واحد اندازه‌گیری جرم است، از آن به عنوان واحد رایج اندازه‌گیری وزن در زندگی روزمره استفاده می‌کنیم.

۱) نسبت قیمت سیب زمینی به وزن آن، برابر است با: تومان به کیلوگرم سیب زمینی.
 نسبت قیمت سیب زمینی به وزن آن برابر است با تومان به ۱ کیلوگرم سیب زمینی.
 این نسبت نشان می‌دهد که با تومان می‌توان ۱ کیلوگرم سیب زمینی خرید.

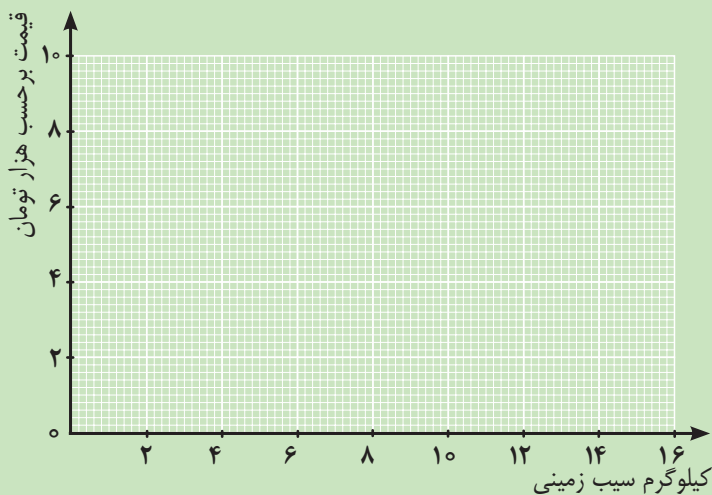
۲) نسبت وزن سیب زمینی به قیمت آن، برابر است با: کیلوگرم سیب زمینی به تومان.
 نسبت وزن سیب زمینی به قیمت آن برابر است با کیلوگرم سیب زمینی به ۱ تومان.
 این نسبت نشان می‌دهد که با ۱ تومان می‌توان کیلوگرم سیب زمینی خرید.

۳) برای پیدا کردن قیمت ۵ کیلوگرم سیب زمینی، رابطه زیر را کامل کنید.

$$5 \text{ کیلوگرم سیب زمینی} = 3 \text{ کیلوگرم سیب زمینی}$$

$$\text{..... تومان} = \text{..... تومان}$$

۴) نمودار رابطه بین مقدار سیب زمینی و قیمت آنها را رسم کنید.



۵) شیب این خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

فعالیت ۲ نشان می‌دهد که نسبت قیمت سیبزمینی به وزن آن مقداری ثابت است و این نسبت نشان دهنده آن است که قیمت ۱ کیلوگرم سیبزمینی چند تومان است. برعکس، نسبت هر مقدار سیبزمینی به قیمت آن مقداری ثابت است و این نسبت نشان دهنده آن است که با ۱ تومان، چه مقدار سیبزمینی می‌توان خرید.

نسبت دو کمیت متناسب با واحدهای مختلف را نرخ می‌نامند.

تعریف



مثال ۴

قیمت پنیر متناسب با وزن آن است. فرض کنید قیمت ۳ کیلوگرم پنیر ۳۰ هزار تومان باشد.

الف) نرخ قیمت پنیر به وزن آن چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ب) نرخ وزن پنیر به قیمت آن چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟

واحد اندازه‌گیری وزن پنیر را کیلوگرم انتخاب می‌کنیم و واحد قیمت را هزار تومان در نظر می‌گیریم. نرخ قیمت پنیر (بر حسب هزار تومان) به وزن آن برابر $10 = \frac{30}{3}$ است که نشان می‌دهد قیمت هر کیلوگرم پنیر ۱۰ هزار تومان است.

برعکس، نرخ وزن پنیر به قیمت آن $\frac{3}{30}$ است که همان $\frac{1}{10}$ است. این نرخ نشان می‌دهد که با هزار تومان، $\frac{1}{10}$ کیلوگرم (۱۰۰ گرم) پنیر می‌توان خرید.

مثال ۵

بنزین مصرفی یک ماشین و مسافت طی شده، دو کمیت متناسب‌اند. برخی ماشین‌ها مسافت

۴۵ کیلومتر را با مصرف ۳ لیتر بنزین طی می‌کنند.

الف) نرخ مسافت طی شده به مصرف بنزین چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ب) نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟

نرخ مسافت طی شده به مصرف بنزین (با واحدهای انتخاب شده) $\frac{45}{3}$ است که برابر است با ۱۵. این نرخ نشان می‌دهد که این ماشین با مصرف هر لیتر بنزین ۱۵ کیلومتر را طی می‌کند.

برعکس، نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده برابر است با $\frac{۳}{۴۵}$ یا $\frac{۱}{۱۵}$ که نشان می‌دهد برای طی کردن ۱ کیلومتر، $\frac{۱}{۱۵}$ لیتر بنزین مصرف می‌شود.

مثال ۶

جدول زیر قیمت یک کالا را، که در بسته‌بندی‌های مختلف عرضه می‌شود، نشان می‌دهد.

وزن	قیمت (تومان)
۵۰۰ (گرم)	۱۵,۰۰۰
۱/۵ (کیلوگرم)	۴۲,۰۰۰
۲ (کیلوگرم)	۵۰,۰۰۰

برای خرید ۶ کیلوگرم از این کالا کدام یک باصرفه‌تر است؟

برای اینکه این قیمت‌ها به درستی مقایسه شوند، ابتدا باید هر کدام از این کمیت‌ها را با واحدهای یکسان اندازه‌گیری کنیم و سپس، نرخ هر کدام را حساب کنیم. مثلاً، وزن را با کیلوگرم و قیمت را با تومان اندازه می‌گیریم. نرخ بسته اول به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{۱۵,۰۰۰}{۰/۵} = ۳۰,۰۰۰$$

یعنی، بسته اول کیلویی ۳۰,۰۰۰ تومان است.

و بسته دوم: $۴۲,۰۰۰ \div ۱/۵ = ۲۸,۰۰۰$ ؛ یعنی بسته دوم کیلویی ۲۸,۰۰۰ تومان است.

و بسته سوم: $۵۰,۰۰۰ \div ۲ = ۲۵,۰۰۰$ ؛ یعنی بسته سوم کیلویی ۲۵,۰۰۰ تومان است.

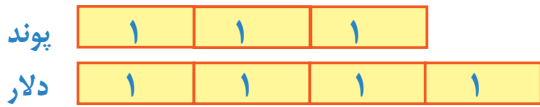
بنابراین بسته سوم باصرفه‌تر است.

مثال ۷

نسبت ارزش هر پوند به دلار تقریباً برابر ۳ به ۴ است. ۳,۰۰۰ پوند چند دلار است؟

نوع ارز	خرید	فروش
دلار	۰.۳۴۴۵	۰.۳۴۶۵
یورو	۰.۳۹۰۰	۰.۳۹۲۵
پوند انگلیس	۰.۴۹۱۰	۰.۴۹۷۰
دلار کانادا	۰.۴۶۹۰	۰.۴۷۲۵
دلار استرالیا	۰.۲۵۲	۰.۲۵۷۰
کرون دانمارک	۰.۵۱۵	۰.۵۲۵
کرون نروژ	۰.۴۰۸	۰.۴۱۶
کرون سوئد	۰.۴۰۹	۰.۴۱۷
فرانک سوئیس	۰.۳۵۶۰	۰.۳۶۱۰

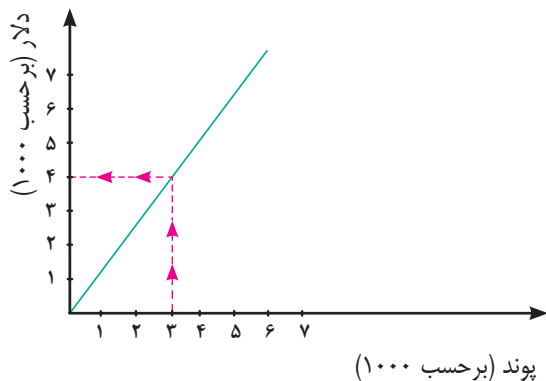
روش رسم شکل: اگر در برابر هر ۳ واحد پوند، ۴ واحد دلار داشته باشیم:



آنگاه در برابر ۳ واحد ۱,۰۰۰ پوندی، ۴ واحد ۱,۰۰۰ دلاری داریم؛ یعنی:



روش رسم نمودار: رابطه بین این دو کمیت را می‌توان با نمودار زیر نشان داد.



روش جبری: با توجه به اینکه ارزش دلار و ارزش پوند کمیت‌هایی متناسب‌اند، نرخ دلار به پوند به شکل

زیر است.

$$\frac{4}{3} = k$$

نرخ بالا ضریب تبدیل پوند به دلار است. برای بررسی درستی این مطلب، می‌توانید به تساوی ظاهری زیر

توجه کنید.

$$\text{دلار} = \text{پوند} \times \frac{\text{دلار}}{\text{پوند}}$$

تساوی بالا به معنای آن است که اگر نسبت دلار به پوند را در مقداری پول بر حسب پوند ضرب کنیم،

$$\text{حاصل، همان مقدار پول بر حسب دلار است. بنابراین: } 4,000 = 3,000 \times \frac{4}{3}$$

برعکس، نرخ تبدیل دلار به پوند با ضریب $\frac{3}{4}$ به دست می‌آید (پوند = دلار \times $\frac{\text{پوند}}{\text{دلار}}$) و نشان می‌دهد

هر ۱ دلار برابر $\frac{3}{4}$ پوند است.

نمودار مثال ۳، مثالی از نسبت است زیرا واحدهای دو محور افقی و عمودی (لیوان به عنوان واحد

اندازه‌گیری حجم) یکی هستند. ولی مثال ۷ مثالی از نرخ بود زیرا واحد محور افقی (پوند) با واحد محور

عمودی (دلار) تفاوت دارد.

۱) نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده در دو ماشین مختلف به ترتیب $\frac{30 \text{ لیتر}}{320 \text{ کیلومتر}}$ و $\frac{27 \text{ لیتر}}{300 \text{ کیلومتر}}$

است. کدام ماشین باصرفه‌تر است؟

.....

.....



۲) بلیت‌های یک سینما در یک ساعت مانده به شروع فیلم، در هر دقیقه به میزان ثابتی به فروش می‌رسد. اگر این سینما ۲۴۰ بلیت را در ۱۶ دقیقه بفروشد، مقدار $\frac{۲۴۰}{۱۶}$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟ سپس به کمک آن، تعداد بلیت‌های فروخته شده در هر ساعت را به دست آورید.

.....

رابطه بین کمیت‌ها همیشه به گونه‌ای نیست که یکی مضربی از دیگری باشد. در فعالیت زیر، رابطه بین دو کمیت را بررسی می‌کنیم که نمی‌توان یکی را به شکل مضربی از دیگری نوشت.

علی و احمد با سرعت برابر در یک مسیر دایره‌ای دوچرخه‌سواری می‌کردند. علی زودتر از احمد دوچرخه‌سواری را شروع کرده بود؛ به طوری که وقتی او ۹ دور زده بود، احمد ۳ دور زده بود.

فعالیت ۳



(۱) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	...
۳	۹
...	۱۲
...	۱۵

(۲) عددهای ستون دوم را چگونه می‌توانیم بر اساس عددهای ستون اول محاسبه کنیم؟

.....

(۳) اگر علی و احمد به طور هم‌زمان دوچرخه‌سواری را شروع کرده باشند و پس از مدتی علی ۹ دور و احمد ۳ دور زده باشند، دربارهٔ سرعت آنها چه می‌توانستیم بگوییم؟

.....

(۴) با در نظر گرفتن این حالت، جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	۰
۳	۹
...	۱۲
...	۱۵

(۵) عددهای ستون دوم را چگونه می‌توانیم بر اساس عددهای ستون اول محاسبه کنیم؟

.....

در حالت اول، مشاهده می‌شود که رابطه بین تعداد دوره‌هایی که علی زده با تعداد دوره‌هایی که احمد زده است، به صورت $A = k + B$ است. در این وضعیت $k = 6$ و به ازای هر یک واحد افزایش در ستون اول، یک واحد افزایش در ستون دوم داریم. چنین رابطه‌ای بین دو کمیت را یک **رابطه جمعی** می‌نامند.

در حالت دوم، این رابطه به صورت $A = kB$ است. در این وضعیت، $k = 3$ و به ازای هر یک واحد افزایش در ستون اول، ۳ واحد افزایش در ستون دوم داریم. حالت اول یک **رابطه جمعی** و حالت دوم را که رابطه بین دو کمیت متناسب است، **رابطه ضربی** می‌نامند.

مثال ۸

رابطه بین سن دو نفر، یک رابطه جمعی است. چرا؟

فرض کنید مردی در سال ۱۳۶۸ در سن ۳۲ سالگی دارای فرزندی می‌شود. جدول زیر سن این پدر و فرزند در سال‌های بعد را نشان می‌دهد.

سال	سن پدر	سن فرزند
۱۳۶۹	۳۳	۱
۱۳۷۰	۳۴	۲
.	.	.
.	.	.
.	.	.
۱۳۹۴	۵۸	۲۶

مشاهده می‌شود که به ازای هر یک سال که سن پدر افزایش می‌یابد، به سن فرزند نیز یک سال اضافه می‌شود. اگر سن فرزند x و سن پدر y باشد داریم: $y = x + 32$. پس رابطه بین سن پدر و فرزند یک رابطه جمعی است.

می‌توان مشاهده کرد که $\frac{33}{1} \neq \frac{34}{2} \neq \frac{58}{26}$ است، پس رابطه بین سن پدر و سن فرزند رابطه ضربی نیست.



۱) در نقشه زیر، هر ۲ سانتی‌متر نشان‌دهنده ۵ کیلومتر است. دو نقطه را در روی نقشه انتخاب کنید. فاصله آنها روی نقشه چقدر است؟ فاصله واقعی آنها از هم چقدر است؟



۲) مینا برای تهیه نوعی سس سالاد، به کتاب آشپزی مراجعه کرد. نسبت روغن به سرکه در آن سس، ۳ به ۴ بود. مینا گفت: یعنی $\frac{3}{4}$ سس روغن است. آیا مینا درست متوجه شده بود؟ توضیح دهید.

۳) عکاسی می‌خواهد عکسی را در ابعاد 25×35 بزرگ کند و سپس آن را روی مقوایی به طول ۵۵ سانتی‌متر چاپ کند. عرض عکس بزرگ شده چقدر خواهد بود؟

۴) علی هر ماه مقداری ثابت پول را پس‌انداز می‌کند. جدول زیر مقدار پس‌انداز او را در چند ماه نشان می‌دهد.

شماره ماه	مقدار پس‌انداز (هزار تومان)
۲	۳۵۰
۴	۷۰۰
۶	۱,۰۵۰
۸	...
۱۰	...

این جدول را به کمک رسم نمودار و از طریق جبری کامل کنید.

۱-۲- نسبت های معکوس

آن روز وقتی از مدرسه به خانه رفتم، متوجه شدم که پدر و مادرم مشغول برنامه ریزی برای نقاشی خانه هستند.

پدر گفت: با نقاش صحبت کردم. گفت که ۲ نفر را برای نقاشی خانه ما می فرستد. او قول داده است که ۶ روزه کار را تمام کند.

مادر پرسید: ۶ روز؟ چقدر زیاد؟ نمی توانیم تعداد کارگرها را بیشتر کنیم تا زمان کمتری طول بکشد؟ مثلاً ۳ کارگر بیایند؟

پدر جواب داد: چندان تفاوت نمی کند. اگر ۳ نفر بیایند، چند روز کمتر می شود؟

من که درس نسبت و تناسب را خوانده بودم، به سرعت وارد بحث شدم و گفتم: «من حساب می کنم.»

و بعد، این تناسب را نوشتم:

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{x}$$



پس از محاسبه به این نتیجه رسیدم که ۳ کارگر نقاش، کارشان را ۹ روزه تمام می کنند! چطور شد؟ یعنی کارشان خیلی بیشتر هم طول می کشد!

مادرم که کمی کم حوصله شده بود، گفت: مثلاً تو ریاضی یاد گرفته ای؟ تعداد نقاش ها بیشتر می شود؛ آن وقت به جای اینکه کار زودتر تمام شود، دیرتر هم تمام می شود!

من که خودم هم تعجب کرده بودم و نمی دانستم چه اتفاقی افتاده است، گفتم: لابد زیاد با هم حرف می زنند و کمتر کار می کنند!

فردای آن روز با سؤالی که در ذهنم ایجاد شده بود، به کلاس ریاضی رفتم و از دبیرمان سؤال کردم:

آیا تعداد نقاش‌هایی که یک ساختمان را رنگ می‌کنند با زمان اتمام کار، کمیت‌هایی متناسب هستند؟

دبیرمان جواب داد: بله.

با خود گفتم، پس چرا جوابی که من دیروز به پدر و مادرم دادم، منطقی به نظر نمی‌آمد؟ بعد هم ماجرا را برای دبیرمان تعریف کردم. طبق معمول، او با طرح یک فعالیت، جواب من را داد.

فعالیت ۴



برای پر کردن مخزن آبی، ۱۰ شیر آب یکسان بر سر لوله‌ها کار گذاشته شده است. دو شیر آب وقتی به طور کامل باز هستند، این مخزن در ۸ ساعت پر می‌شود.

(۱) اگر ۴ شیر آب، هم‌زمان، به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟ دبیر/ببخند/زنان به من گفت: حواست باشد که شیرهای آب با هم حرف نمی‌زنند!

(۲) اگر ۸ شیر آب هم‌زمان به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟

(۳) رابطه بین تعداد شیرهای باز آب و زمان پر شدن مخزن را توصیف کنید.

فعالیت ۴ رابطه بین دو کمیت متناسب را نشان می‌دهد که بر خلاف کمیت‌هایی که قبلاً با آنها آشنا شده‌ایم، با افزایش مقدار یکی از آنها، مقدار دیگری کاهش می‌یابد.



در دو کمیت متناسب، اگر با افزایش (یا کاهش) یک کمیت، کمیت دیگر نیز افزایش (یا کاهش) یابد، می‌گویند این دو کمیت متناسب، با هم رابطه مستقیم دارند؛ اما اگر با افزایش (یا کاهش) یک کمیت، کمیت دیگر کاهش (یا افزایش) یابد، می‌گویند این دو کمیت متناسب، با هم رابطه معکوس دارند.

پس از انجام دادن این فعالیت گفتم: پس رابطه تعداد نقاش‌ها با تعداد روزهای کار یک رابطه معکوس است؟ دبیرمان گفت: بله. جواب را پیدا کردی!

گفتم: حالا چطور باید تعداد روزهای کار را بر حسب تعداد نقاش‌ها پیدا کنم؟

دبیرمان گفت: فرض کن نقاشی، ساختمانی را در ۱۲ روز رنگ می‌کند. این نقاش در هر روز چه کسری از ساختمان را رنگ می‌کند؟

گفتم: جواب دادن به این سؤال آسان است. این نقاش هر روز $\frac{1}{12}$ کل خانه را رنگ می‌کند که در ۱۲ روز همه خانه رنگ می‌شود.

دبیرمان پرسید: حالا اگر تعداد نقاش‌ها ۲ نفر باشد، چند روز طول می‌کشد تا کل ساختمان رنگ شود؟ جواب دادم: هر کدام روزانه $\frac{1}{12}$ خانه را رنگ می‌کند؛ پس با هم روزی $\frac{1}{6} = 2 \times \frac{1}{12}$ خانه را رنگ می‌کنند. بنابراین، دو نفر با هم در ۶ روز خانه را رنگ خواهند کرد.

دبیرمان گفت: حالا اگر تعداد نقاش‌ها ۳ نفر باشد، چند روز طول می‌کشد تا کل ساختمان رنگ شود؟ جواب دادم: هر کدام روزانه $\frac{1}{12}$ خانه را رنگ می‌کند؛ پس ۳ نفر با هم، روزی $\frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{12}$ خانه را رنگ می‌کنند. بنابراین، ۳ نفر با هم در ۴ روز خانه را رنگ خواهند کرد.

دبیرمان گفت: می‌بینی که حاصل ضرب تعداد نقاش‌ها در تعداد روزهای لازم برای تمام کردن نقاشی خانه شما، مقدار ثابت ۱۲ است. زیرا کل این کار، نیازمند ۱۲ روز کار یک نقاش است و تعداد نقاش‌ها را به هر نسبت افزایش دهیم، تعداد روزهای مورد نیاز به همان نسبت کاهش می‌یابد؛ به گونه‌ای که حاصل ضرب تعداد نقاش‌ها در تعداد روزهای مورد نیاز، عدد ثابت ۱۲ شود.

وقتی دو کمیت با هم رابطه معکوس دارند، به جای اینکه نسبت بین آنها عدد ثابتی باشد، حاصل ضربشان عددی ثابت است. در مسئله تعداد نقاش‌ها و روزهای کاری،

$$1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$$

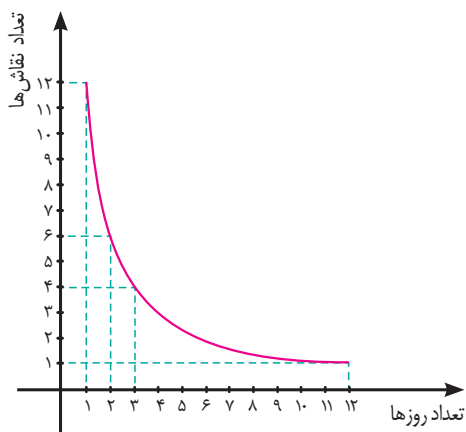


اگر a و b مقادیر متناظر دو کمیت متناسب باشند که با هم رابطه معکوس دارند، مقدار $K = a \times b$ ثابت است و اگر c و d دو مقدار متناظر دیگر از همین دو کمیت باشند، داریم:

$$K = a \times b = c \times d$$

$$a = \frac{K}{b} \quad , \quad c = \frac{K}{d}$$

در مسئله نقاش‌ها و روزهای کار، $K = 2 \times 6 = 12$ و داریم: $c = \frac{12}{3} = 4$
برای درک بهتر رابطه بین این دو کمیت، نمودار رابطه بین آنها را رسم می‌کنیم.



مثال ۹

محمود هر شب ۳ صفحه از کتابی را مطالعه می‌کند. او کتاب را در ۲۰ روز تمام می‌کند. اگر محمود بخواهد کتاب را در ۱۵ روز تمام کند، هر شب باید چند صفحه از آن را بخواند؟
به سادگی می‌توان دریافت که برای کاهش زمان مطالعه کتاب، باید تعداد صفحاتی که هر شب محمود مطالعه می‌کند، افزایش یابد. در این مثال، دو کمیت زمان و تعداد صفحات مطالعه شده در هر شب، با هم رابطه معکوس دارند.

در این وضعیت، مقدار ثابت یعنی تعداد کل صفحات کتاب برابر است با: $K = 3 \times 20 = 60$ و داریم:

$$c = \frac{60}{15} = 4$$



۱ - الف) دو کمیت متناسب را نام ببرید که با هم رابطه معکوس داشته باشند.

.....

ب) با در نظر گرفتن ارتباط این دو کمیت، مسئله‌ای طرح کنید.

.....

۲) شمعی به طول ۱۴ سانتی‌متر را روشن می‌کنیم. این شمع در هر ۵ دقیقه ۱ سانتی‌متر کوتاه می‌شود. الف) جدول زیر را کامل کنید.

زمان بر حسب دقیقه	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
طول شمع	۱۴	۱۳	۱۲
میزان کاهش طول شمع	۰	۱	۲

ب) با افزایش زمان، طول شمع چگونه تغییر می‌کند؟ با توجه به سطرهای اول و دوم جدول، آیا زمان و طول شمع کمیت‌های متناسب معکوس یکدیگرند؟ چرا؟

پ) با توجه به سطرهای اول و سوم جدول، چه رابطه‌ای بین زمان و میزان کاهش طول شمع وجود دارد؟ این دو کمیت چه نوع رابطه‌ای با هم دارند؟

.....





۱) جاهای خالی را پر کنید.

- نسبت دو کمیت متناسب که با یک واحد اندازه‌گیری نمی‌شوند نامیده می‌شود.
- دو کمیت A و B را در نظر بگیرید. اگر با افزایش یک واحد از A ، یک واحد از B افزایش یابد، دو کمیت رابطهٔ دارند.

۲) دو مثال از نرخ بیان کنید.

.....

۳) اگر ضریب تبدیل واحد A به B عدد $\frac{2}{3}$ باشد، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.
الف) ۴ واحد از A معادل چند واحد از B است؟

.....

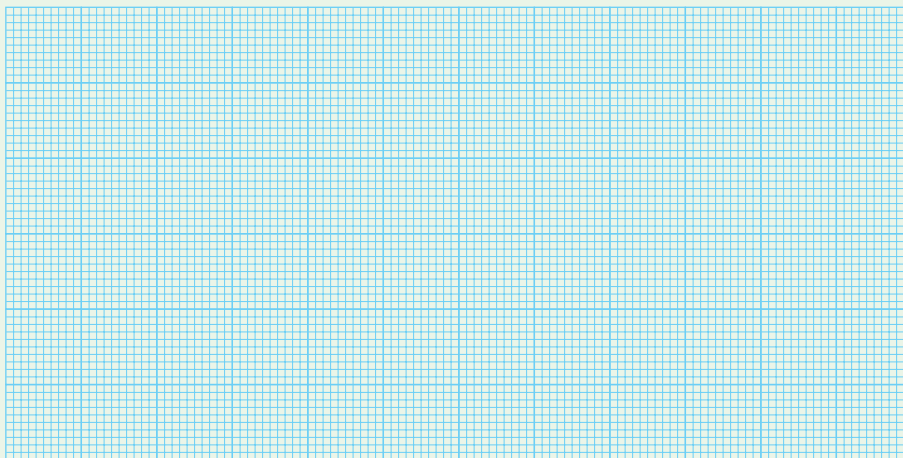
ب) ۴ واحد از B معادل چند واحد از A است؟

.....

پ) ضریب تبدیل واحد B به واحد A را بنویسید.

.....

ت) رابطهٔ بین این دو واحد را با نمودار نشان دهید و به پرسش‌های الف و ب از روی نمودار پاسخ دهید.



۴) جدول زیر نوعی کالا را نشان می‌دهد که در سه اندازه کوچک، متوسط و بزرگ بسته بندی شده است.

نوع	وزن (کیلوگرم)	قیمت (تومان)	نسبت وزن به قیمت	نسبت قیمت به وزن
کوچک	۱/۵	۱,۲۰۰
متوسط	۴	۳,۰۰۰
بزرگ	۱۵	۱۰,۰۰۰

الف) جدول را کامل کنید.

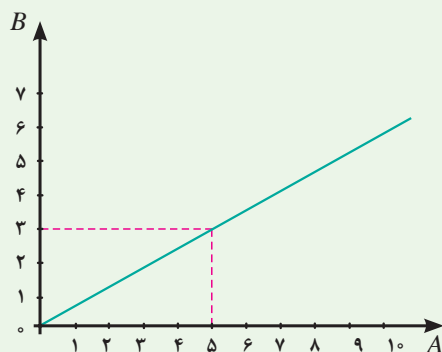
ب) کدام بسته با صرفه‌تر است؟

۵) نمودار زیر رابطه بین کمیت A و کمیت B را نشان می‌دهد:

الف) ضریب تبدیل A به B و B به A را بنویسید.

ب) ۳ واحد از A تقریباً معادل چند واحد از B است؟

پ) ۵ واحد از B تقریباً معادل چند واحد از A است؟



۶) دو کمیت داده شده در هر قسمت با هم متناسب هستند. کدام دو کمیت مستقیم و کدام دو

معکوس هستند؟

الف) وزن یک کالا و قیمت آن؛

ب) تعداد شیرهایی که یک حوض آب را پر می‌کنند و زمان پر شدن حوض؛

پ) محیط دایره‌ها و طول شعاع آنها؛

ت) تعداد مشتریان در یک بانک و زمان انتظار آنها با فرض برابری زمان سرویس‌دهی؛

ث) وزن بسته پستی و هزینه ارسال بدون در نظر گرفتن هزینه ثابت؛

ج) تعداد کارگران و زمان انجام کار برای تخلیه بارهای یک انبار؛

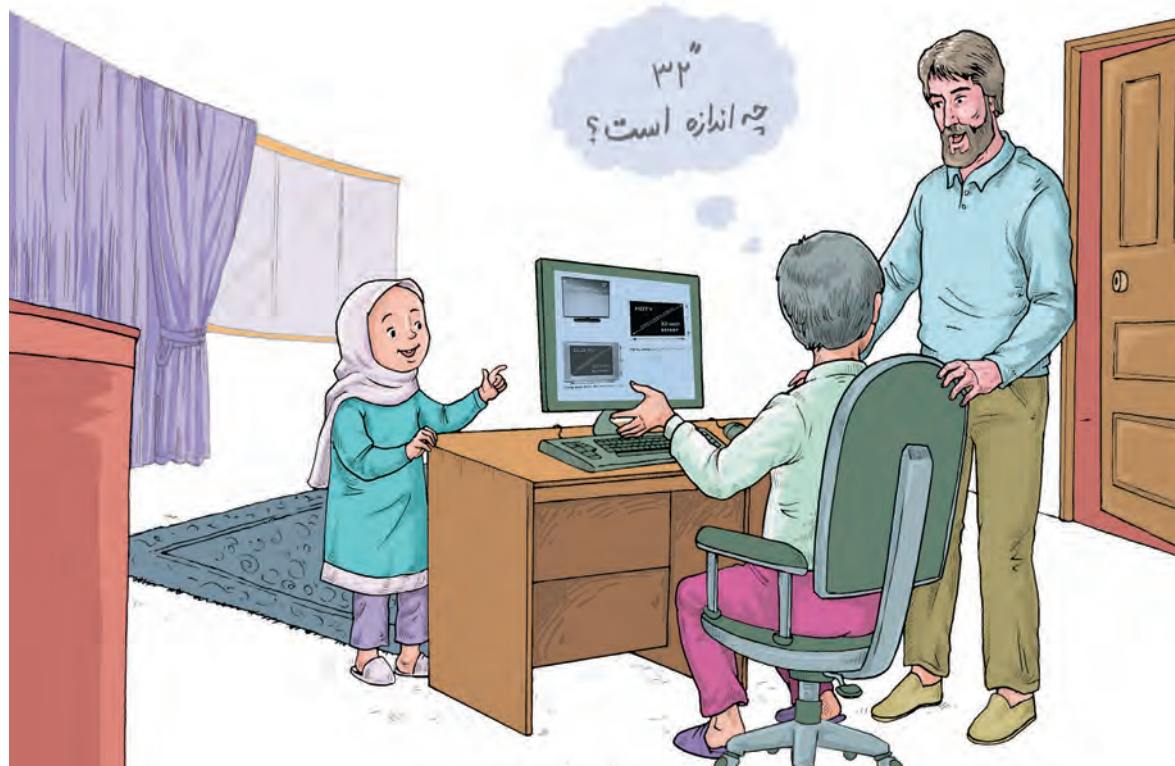
چ) درآمد حاصل از دریافت عوارضی در یک اتوبان و تعداد ماشین‌هایی که از آن عبور می‌کنند.

۱-۳- واحدهای اندازه گیری انگلیسی: طول

دیشب در منزل ما شور و هیجانی برپا بود. پدرم قول داده بود که برای ما تلویزیونی نو بخرد. روز خرید تلویزیون فرارسیده بود. اعضای خانواده پشت سر هم از یکدیگر درباره تلویزیون سؤال می کردند؛ خواهرم پرسید: «اندازه تلویزیونی که می خواهیم بخریم، چقدر است؟» برادرم گفت: «هر چه بزرگ تر، بهتر.» پدرم گفت: «پسر جان، اندازه تلویزیون باید با اندازه اتاق متناسب باشد. یک تلویزیون ۴۶ اینچی را که نمی توانیم در این اتاق بگذاریم.» من هم که نمی دانستم تلویزیون ۴۶ اینچی چقدر است، آن قدر ذوق زده بودم که بدون اینکه سؤالی کنم فوراً رایانه ام را روشن کردم و در اینترنت به جست و جو پرداختم. تصاویر زیبایی از تلویزیون پیدا کردم. تصاویر زیر سؤال هایی در ذهنم ایجاد کرد.



از پدرم پرسیدم: علامتی که در کنار ۳۲ دیده می شود، چیست؟ گفت: یعنی اندازه تلویزیون ۳۲ اینچ است. گفتم: یعنی چقدر؟ گفت: الان کار دارم؛ بعداً. گفتم فقط یک سؤال: چرا قطر تلویزیون را نشان داده است؟ گفت: اندازه تلویزیون را با قطرش بیان می کنند. اگر خودت کمی جست و جو کنی، پاسخ سؤال هایت را می توانی پیدا کنی.



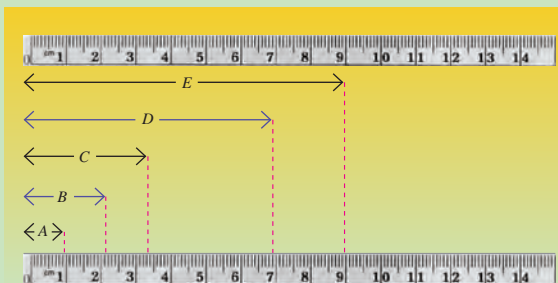
دوباره از پدرم سؤال کردم: «چرا اندازه تلویزیون‌ها را با همان سانتی‌متر بیان نمی‌کنند؟ ۳۲ اینچ یعنی چند سانتی‌متر؟» پدرم خط‌کشی به دستم داد و گفت: «اینچ یکی از واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی^۱ طول است. اگر دقیق به این خط‌کش نگاه کنی متوجه می‌شوی هر اینچ (in) چند سانتی‌متر است.»



فعالیت ۵



۱) با توجه به خط‌کشی که بر حسب سانتی‌متر و اینچ علامت‌گذاری شده، بگویید هر اینچ تقریباً چند سانتی‌متر است؟



۲) به دو خط‌کش روبه‌رو توجه کنید؛ فکر می‌کنید کدام خط‌کش با سانتی‌متر و کدام‌یک با اینچ علامت‌گذاری شده است؟

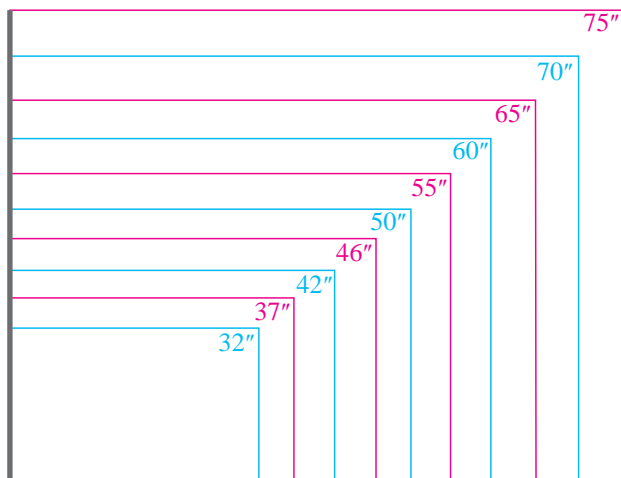
۳) طول‌های مشخص شده را با توجه به هریک از خط‌کش‌ها پیدا کنید.

طول بر حسب in		طول بر حسب cm	
	A		A
	B		B
	C		C
	D		D
	E		E

۴) فکر می‌کنید استفاده از کدام واحد برای اندازه‌گیری طول ساده‌تر است؟ چرا؟

۱- این گونه واحدها را واحدهای مرسوم نیز می‌نامند.

هنوز پاسخ سؤال‌هایم را پیدا نکرده بودم. پس دوباره به سراغ اینترنت رفتم و جدول زیر را پیدا کردم.^۱



Size	Width	Height	Area
32"	27.9" 70.9cm	15.7" 39.9cm	437 in ² 0.283 m ²
37"	32.2" 81.8cm	18.1" 46cm	585 in ² 0.376 m ²
42"	36.6" 93cm	20.6" 52.3cm	754 in ² 0.487 m ²
46"	40.1" 101.9cm	22.5" 57.2cm	904 in ² 0.582 m ²
50"	43.6" 110.7cm	24.5" 62.2cm	1068 in ² 0.689 m ²
55"	47.9" 121.7cm	27" 58.6cm	1293 in ² 0.835 m ²
60"	52.3" 132.8cm	29.4" 74.7cm	1538 in ² 0.992 m ²
65"	56.7" 144cm	31.9" 81cm	1805 in ² 1.165 m ²
70"	61.1" 155.2cm	34.4" 87.4cm	2102 in ² 1.356 m ²
75"	65.4" 166.1cm	36.8" 93.5cm	2407 in ² 1.553 m ²

با دقت در جدول و شکل‌های دو تلویزیون ۳۲ اینچی متوجه شدم که مثلاً تلویزیون‌های ۳۲ اینچی ممکن است طول‌ها و عرض‌های مختلفی داشته باشند و در نتیجه، صفحه‌های آنها نیز ممکن است متفاوت باشند، ولی هنوز نتوانسته بودم بفهمم که برای اتاق پذیرایی ما تلویزیون با چه اندازه‌ای مناسب است.

Screen Size	Recommended Range
19"	0.7-2.4 m
22"	0.9-2.7 m
28"	1.0-3.1 m
32"	1.2-4.0 m
37"	1.5-4.6 m
40"	1.6-5.0 m
42"	1.6-5.3 m
46"	1.8-5.0 m
52"	1.9-6.5 m

به جست‌وجو ادامه دادم. جدول روبه‌رو را هم در زیر تصویر دیدم که کمک کرد بفهمم چرا پدرم می‌گوید تلویزیون ۴۶ اینچی برای خانه ما مناسب نیست.^۲

۱- Size: اندازه Width: عرض Height: ارتفاع Area: مساحت
۲- Screen Size: اندازه صفحه تصویر Recommended Range: فاصله توصیه شده



۱) با توجه به جدول صفحه قبل (جدول فاصله‌های توصیه شده)، حداقل فاصله مناسب بیننده از تلویزیون ۴۶ اینچی چقدر است؟

۲) تصویر زیر یک اتاق نشیمن را نشان می‌دهد. با توجه به جدول صفحه قبل (جدول فاصله‌های توصیه شده)، تلویزیون با چه اندازه‌ای را توصیه می‌کنید؟



جدول دیگری پیدا کردم که می‌توانست به من کمک کند تا متوجه شوم که تلویزیون مناسب برای خانه ما باید چه اندازه‌ای داشته باشد. با خودم گفتم: حتماً **inch** همان اینچ است. ولی **feet** یعنی چه؟ آیا واحد دیگری برای اندازه‌گیری طول است؟

Viewing Distance in feet	Viewing Distance in inches	Min Size	Max Size
۴	۴۸	۱۹	۳۲
۶	۷۲	۲۶	۴۶
۸	۹۶	۳۲	۶۳
۱۰	۱۲۰	۴۰	۸۰
۱۲	۱۴۴	۴۶	۹۶
۱۴	۱۶۸	۵۲	۱۱۲

۱- feet : جمع فوت است. در زبان انگلیسی واحدها جمع بسته می‌شوند. برای مثال ۴ feet بیان می‌شود.

Max Size: حداکثر اندازه تلویزیون

Min Size: حداقل اندازه تلویزیون

۲- Viewing Distance: فاصله از تلویزیون



۱) اندازه‌های داده شده در ستون دوم (از سمت چپ) جدول زیر را که بر حسب اینچ هستند، به متر تبدیل کنید.

Viewing Distance in feet	Viewing Distance in inches	فاصله از تلویزیون بر حسب متر	Min Size	Max Size
۴	۴۸	۰۰۰	۱۹	۳۲
۶	۷۲	۰۰۰	۲۶	۴۶
۸	۹۶	۰۰۰	۳۲	۶۳
۱۰	۱۲۰	۰۰۰	۴۰	۸۰
۱۲	۱۴۴	۰۰۰	۴۶	۹۶
۱۴	۱۶۸	۰۰۰	۵۲	۱۱۲

۲) بین اعداد در ستون اول و اعداد در ستون دوم چه رابطه‌ای وجود دارد؟

۳) بین اعداد در ستون اول و اعداد در ستون سوم چه رابطه‌ای وجود دارد؟

۴) جاهای خالی را پر کنید:

الف) متر = ۱ اینچ
ب) متر = اینچ = ۱ فوت

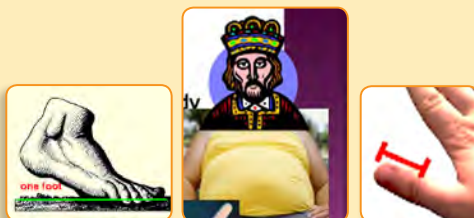
۵) اگر برای پخش فیلم‌های آموزشی بخواهیم تلویزیونی در کلاس شما بگذاریم، فکر می‌کنید چه اندازه‌ای مناسب است؟

.....

ما هر روز در زندگی خود در خانه یا مدرسه از اندازه‌گیری استفاده می‌کنیم. در سال‌های گذشته، با واحدهای اندازه‌گیری طول (متر، سانتی‌متر، میلی‌متر، کیلومتر و غیره) آشنا شده‌اید. امروزه غالب واحدهای اندازه‌گیری به دو سیستم استاندارد اندازه‌گیری بین‌المللی (SI) و سیستم اندازه‌گیری انگلیسی (مرسوم) تقسیم می‌شوند.



سیستم اندازه‌گیری انگلیسی سیستمی بود که واحدهایی برای اندازه‌گیری در اختیار قرار می‌داد. در این سیستم، از اعضای مهم بدن به عنوان واحد اندازه‌گیری استفاده می‌شد. برای مثال، در قدیم مردم برای اندازه‌گیری فاصله‌های کوتاه روی زمین از پاهایشان استفاده می‌کردند. مصری‌ها، یونانی‌ها و رومی‌ها نیز این واحد را به کار می‌بردند.



واحدهای دیگر نیز با توجه به ویژگی‌های بدنی پادشاه تعیین می‌شد. برای مثال، یک یارد اندازه دور کمر پادشاه و یک اینچ اندازه اولین بند انگشت شست او بود. تقریباً هر ۱۲ اینچ برابر با یک فوت است. در زمان‌های گذشته انسان برای اندازه‌گیری مسافت‌های طولانی از گام‌هایش استفاده می‌کرد. هر دو گام برابر با ۱ پیس (pace) بود. رومی‌ها عرض جاده‌ها را باین واحد تعیین می‌کردند (یک مایل برابر است با طول ۱۰۰۰ پیس). حجم به کمک وسایل معمول در آشپزخانه مانند فنجان، قاشق غذاخوری یا سطل اندازه‌گیری می‌شد. واژه گالن از واژه‌ای قدیمی گرفته شده است که به معنای سطل بود. با توجه به استاندارد نبودن واحدهای انگلیسی، در ۱۶۷۰ میلادی، سیستم اندازه‌گیری ده‌دهی متریک پیشنهاد شد (در زبان فرانسه، متر معادل واژه اندازه است). در حال حاضر، سه کشور در جهان از سیستم اندازه‌گیری انگلیسی استفاده می‌کنند. با مراجعه به اینترنت نام این سه کشور را پیدا کنید.

واحد طول در سیستم SI، **متر** و در سیستم انگلیسی، **یارد** است. با توجه به اینکه واحدهای استفاده شده در سیستم انگلیسی قدیم طوری تعریف شده بودند که افراد مختلف برای یک شیء اندازه‌های مختلفی پیدا می‌کردند، در طول زمان نیاز به استاندارد کردن آنها احساس شد. برخی از واحدهای استاندارد شده طول در سیستم انگلیسی عبارت‌اند از:

۱۲ اینچ (in) = ۱ فوت (ft)
۳ فوت (ft) = ۱ یارد (yd)
۵,۲۸۰ فوت (ft) = ۱ مایل (mi)

ضریب تبدیل این واحدها به یکدیگر به صورت زیر است.

ضریب تبدیل (با تقریب کمتر از ۰/۰۱)	به	برای تبدیل از
۱/۶۱	کیلومتر	مایل
۲/۵۴	سانتی‌متر	اینچ
۰/۳۱	متر	فوت
۰/۹۱	متر	یارد
۰/۶۲	مایل	کیلومتر
۰/۳۹	اینچ	سانتی‌متر
۳/۲۸	فوت	متر
۱/۰۹	یارد	متر

۱- جدول زیر را کامل کنید.

کارد در کلاس ۵



طول اندازه گرفته شده برحسب واحدهای اندازه‌گیری SI	طول اندازه گرفته شده برحسب واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی	طول حدس زده شده برحسب واحدهای اندازه‌گیری SI	طول حدس زده شده برحسب واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی	
... cm	... in	... cm	... in	عرض کتاب ریاضی
... m	... ft	... m	... ft	طول کتاب ریاضی
... m	... yd	... m	... yd	طول پنجره اتاق
... mm	... in	... mm	... in	طول خودکاری که از آن استفاده می‌کنید
... m	... ft	... m	... ft	طول اتاق
... cm	... in	... cm	... in	دور کمر خودتان

۲- از نظر شما، کار با کدام سیستم اندازه‌گیری راحت‌تر است؟ چرا؟



۱) ورزشکاری در پرش سه‌گام به ترتیب ۴ فوت و ۶ اینچ، ۴ فوت و ۵ اینچ، ۳ فوت و ۱۱ اینچ پرید.



الف) این ورزشکار روی هم چند فوت و چند اینچ پریده است؟

.....

ب) او چند متر پریده است؟

پ) اگر رکورد این رشته ۱۲ فوت و ۱۰ اینچ باشد، برای شکستن رکورد، چقدر بیشتر باید می‌پرید؟

.....

۲) قد شما چند سانتی‌متر است؟

الف) چند متر است؟

ب) چند اینچ است؟

پ) چند فوت است؟

ت) چند یارد است؟

۳) یک گردشگر از کشوری که از سیستم اندازه‌گیری

انگلیسی استفاده می‌کند، به ایران آمده است.

او در راه اصفهان، تابلوی مقابل را می‌بیند:

فرض کنید شما به عنوان مسئول سازمان جهانگردی

می‌خواهید پیشنهاد بدهید فاصله شهرها را بر حسب مایل نیز

روی تابلوهای راهنمایی بنویسند.

حساب کنید تا اصفهان چند مایل باقی مانده است؟

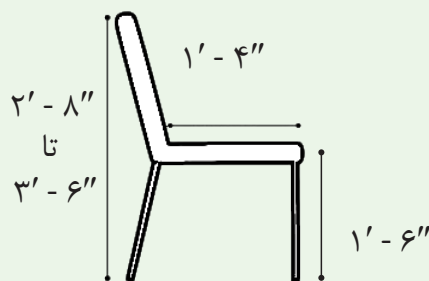
اصفهان ۳۴۰ Km

۴) در یک مسابقه دو امدادی، هر تیم باید ۲۰ مایل بدود. اگر هر بازیکن مجاز باشد فقط ۳ کیلومتر بدود، هر تیم چند دوندۀ باید داشته باشد؟

۵) یک دبیر هنر، یک بسته نوار تزئینی به طول ۵۰ یارد خرید. هر دانش‌آموز برای تکمیل پروژه به ۰/۸ متر نوار نیاز دارد. ۳۰ دانش‌آموز در این پروژه شرکت دارند. چند یارد نوار باقی می‌ماند؟

۶) سه وسیله نام ببرید که به طور رایج، اندازه‌شان با واحدهای انگلیسی بیان می‌شود.

۷) حسین هنرجوی رشته صنایع چوب است. او برای انجام پروژه خود که ساخت صندلی است به الگوی زیر دست پیدا کرد. ابعاد و اندازه‌های روی شکل بر حسب فوت و اینچ است. این اندازه‌ها را بر حسب سانتی‌متر به دست آورید!

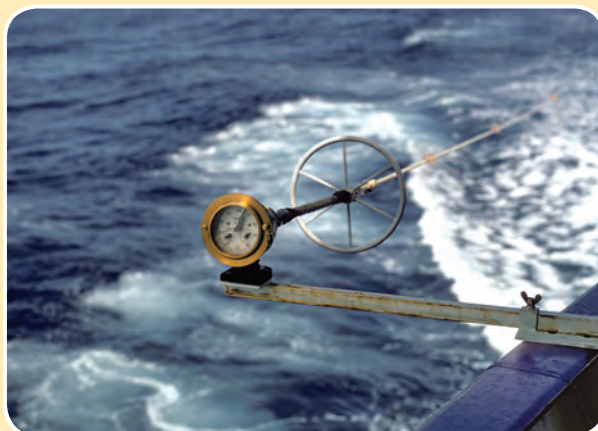


۸) در دریانوردی از واحدی به نام گره برای اندازه‌گیری سرعت شناورها در دریا استفاده می‌شود. سرعت یک گره برابر است با یک مایل دریایی بر ساعت. مایل دریایی با واحد مایل که از آن برای اندازه‌گیری طول در خشکی استفاده می‌شود فرق دارد. تحقیق کنید یک مایل دریایی با مایل (اندازه‌گیری در خشکی) چه رابطه‌ای دارد.

.....

در قدیم برای اندازه‌گیری سرعت کشتی، روی یک طناب به فاصله‌های یک فوت از هم گره‌هایی می‌زدند. سپس طناب را به پشت کشتی یا قایق طوری می‌بستند که اولین گره روی سطح آب قرار گیرد و بقیه طناب به زیر آب می‌رفت. هر چه کشتی تندتر می‌رفت تعداد گره‌های بیشتری از آب بیرون می‌آمد. تعداد گره‌های روی آب بدون احتساب اولین گره، سرعت را اندازه‌گیری می‌کند. تعداد این گره را سرعت بر حسب گره می‌نامند.

خواندنی



۱-۴- واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی: جرم

برای شرکت در مراسم عروسی پسرعمویم به همراه خانواده به شهرستان می‌رفتیم. در راه، پدرم از مادرم پرسید: «بالاخره مشخص نشد که چه هدیه‌ای می‌دهیم؟» مادرم گفت: «اجازه بدهید برسیم! به بازار می‌رویم و قطعه‌ای طلا می‌خریم.» پدرم پرسید: «اکنون طلا گرمی چند است؟» مادرم گفت: «نمی‌دانم؛ اخبار ساعت ۱۱ قیمت طلا را در هر روز اعلام می‌کند. ساعت ۱۱ رادیو را روشن کردیم. در پایان اخبار، گوینده رادیو گفت:

امروز طلا در بازار جهانی به قیمت هر اونس ۱,۳۵۴ دلار معامله شد.

پدرم گفت: «یعنی چند؟» مادرم گفت: «الان بر حسب گرم هم می‌گوید.»

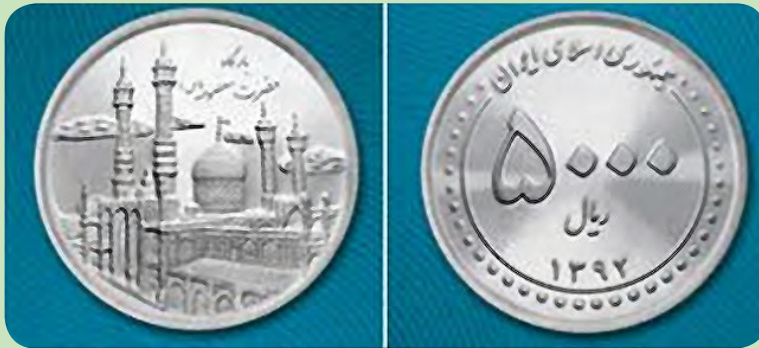
در بازار تهران هر گرم طلای خام به قیمت ۱,۳۴,۲۵۰ ریال معامله شد.

پرسیدم: «اونس دیگر چیست؟ پدرم گفت: «اونس یکی از واحدهای اندازه‌گیری جرم در سیستم انگلیسی است ولی من هم دقیقاً نمی‌دانم چقدر می‌شود. در کتاب‌های درسی ما فقط واحدهای متریک (SI) آموزش داده می‌شد.» با افتخار گفتم: «ولی ما در فنی و حرفه‌ای در کتاب ریاضی واحدهای سیستم انگلیسی را هم می‌خوانیم؛ جلسه گذشته با واحدهای طول آشنا شدیم.» چون قرار بود چند روزی در شهرستان بمانیم، تکالیفم همراهم بود. به امید آنکه توضیحی پیدا کنم، کاربرگ ریاضی‌ام را بیرون آوردم. ولی ... پدرم پرسید: «خوب، هر اونس چقدر است؟» گفتم: «ننوشته است؛ باید این فعالیت را انجام دهم تا خودم متوجه شوم!»





۱) وزن یک سکه ۵۰۰۰ ریالی تقریباً $\frac{1}{36}$ اونس است. یک سکه ۵۰۰۰ ریالی را در دست بگیرید و وزن آن را بر حسب گرم تخمین بزنید.



۲) بر حسب تخمین خود بگویید ۱ اونس تقریباً چند گرم است.

۳) با مراجعه به اینترنت، وزن یک سکه ۵,۰۰۰ ریالی را بر حسب گرم پیدا کنید.

۴) با در نظر گرفتن وزن یک سکه ۵,۰۰۰ ریالی، هر اونس تقریباً چند گرم است؟

برخی واحدهای اندازه‌گیری جرم در سیستم انگلیسی عبارت اند از اونس، پوند.

$$16 \text{ اونس (OZ)} = 1 \text{ پوند (lb)}$$

همان طور که گفتیم، در بعضی از کشورها از سیستم اندازه‌گیری انگلیسی استفاده می‌شود. ما برای اینکه بتوانیم با مردم این کشورها ارتباط برقرار کنیم باید بتوانیم واحدهای اندازه‌گیری مان را به هم تبدیل کنیم. در این کتاب هر اونس را به طور تقریبی برابر با ۲۸ گرم در نظر می‌گیریم.



۱) فرض کنید می‌خواهید دستور پخت یک غذای اصیل ایرانی را برای دوستان بفرستید و دوست شما اهل کشوری است که در آنجا از سیستم انگلیسی استفاده می‌شود. مقادیر مواد مورد نیاز را بر حسب چه واحدهایی می‌نویسید؟



۲) ضریب تبدیل اونس به گرم را پیدا کنید.

۳) توضیح دهید برای تبدیل اونس به پوند یا برعکس، از چه عملیاتی استفاده می‌کنید؟

۴) برای تبدیل اونس به کیلوگرم از چه عملیاتی استفاده می‌کنید؟

۵) برای تبدیل واحدها، جدول روبه‌رو را کامل کنید.

۱ گرم	... اونس
۱ پوند	... گرم
۱ کیلوگرم	... اونس
۱ پوند	... کیلوگرم



واحد‌های SI	واحد‌های سیستم انگلیسی	مواد لازم
	۱ C	خرمای خرد شده
	$\frac{1}{4}$ lb	کره
۵ mL	۱ tsp	جوش شیرین
$\frac{2}{5}$ mL	$\frac{1}{4}$ tsp	نمک
۴۵ mL	۳ tbsp	پودر کاکائو
	$1\frac{1}{4}$ C	آرد
	۲	تخم مرغ
	$\frac{2}{3}$ C	شکر
۵ mL	۱ tsp	وانیل
	$\frac{1}{4}$ C	گردوی خرد شده
	$\frac{3}{4}$ C	شکلات خرد شده
	$1\frac{1}{3}$ C	شکر قهوه‌ای
$176/66^{\circ}C$	$350^{\circ}F$	دمای پخت
	۱۳ inches × ۹ inches	اندازه ظرف

برای انجام دادن تمرین‌های این بخش، با واحدهایی روبه‌رو می‌شوید که در درس به آنها اشاره نشده است. با مراجعه به اینترنت، این واحدها و واحدهای مشابه آنها را نیز در سایر سیستم‌های اندازه‌گیری تشخیص دهید. به کمک ضریب تبدیل یا با استفاده از برنامه‌های نرم‌افزاری که برای تبدیل واحدها در اینترنت پیدا می‌کنید، این واحدها را به هم تبدیل کنید. (نیازی به حفظ کردن این ضرایب نیست.)

۱) پرستو مواد لازم زیر را برای تهیه کیک از یکی از دوستانش در خارج از ایران گرفت. به کمک اینترنت یا منابع دیگر، واحدهایی را که نمی‌شناسید، شناسایی کنید و با انتخاب واحد مناسب و کامل کردن جدول روبه‌رو، به پرستو کمک کنید تا بتواند کیک خود را بپزد.



۲) پرستو در مقابل می‌خواهد مواد زیر را برای تهیه یک کیک برای دوستش بفرستد. با انتخاب واحد مناسب، جدول زیر را کامل کنید تا مواد لازم برای تهیه کیک مورد نظرش را بر حسب واحدهای اندازه‌گیری در سیستم انگلیسی بفرستد.

واحدهای انگلیسی	واحدهای سیستم SI	مواد لازم
...	۷۵۰ g	توت فرنگی خرد شده
...	۵۰ g	شکر
...	۲۵۰ g	آرد
$\frac{1}{4} C$	۶۰ ml	بیکنگ پودر
$\frac{1}{4} \text{ tsp}$	۲ ml	نمک
...	۱۲۰ g	کره
...	۱	تخم مرغ
...	۱۶۰ ml	شیر
...	۲۵۰ ml	خامه
۳۳۸ °F	۱۷۰ °C	دمای پخت
...	ظرف گرد به قطر: ۲۵ cm	اندازه ظرف

۳) در سیستم انگلیسی برای اندازه‌گیری دما از واحد فارنهایت استفاده می‌شود. رابطه بین درجه فارنهایت و درجه سانتی‌گراد را با فرمول زیر می‌توان نشان داد:

$$۳۲ + (\text{میزان دما بر حسب سانتی‌گراد} \times \frac{1}{1.8}) = \text{میزان دما بر حسب فارنهایت (}^{\circ}\text{F)}$$

لاله با مراجعه به یک سایت وضعیت دمای چند شهر را پیدا کرد. با توجه به جدول، دمای فرانکفورت و آدیس‌آبابا را بر حسب سانتی‌گراد محاسبه کنید.

Sort by: City		Local time and weather around the world					
Accra	Sun 03:20		75 °F	Edmonton *	Sat 21:20	n/a	36 °F
Addis Ababa	Sun 06:20		63 °F	Frankfurt *	Sun 05:20		46 °F
Adelaide	Sun 12:50		68 °F	Guatemala	Sat 21:20		68 °F

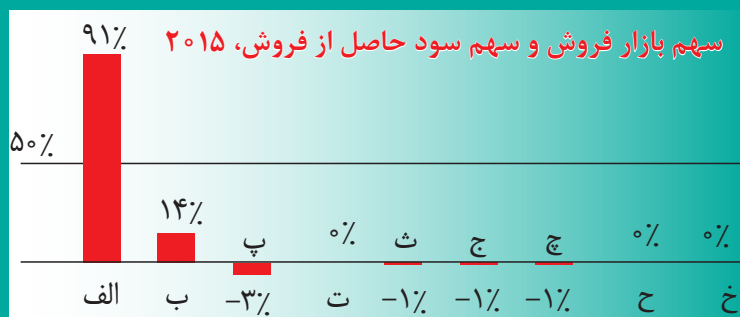


پودمان دوم

درصد و کاربردهای آن



گزارشی نشان می‌دهد که در سال ۲۰۱۵ شرکت الف ۹۱ درصد از سود کل بازار تلفن‌های هوشمند را به خود اختصاص داده است. این در حالی است که شرکت ب هم‌چنان بزرگ‌ترین تولید کننده تلفن هوشمند به شمار می‌رود و ۲۳/۹ درصد از تلفن‌های هوشمند که در سراسر جهان به فروش رسیده، محصول این شرکت است و شرکت الف با کسب ۱۷/۲ درصد از فروش جهانی، رتبه دوم را به خود اختصاص داده است.



۲-۱- محاسبه ذهنی درصد

همیشه از دبیران ریاضی می‌شنیدم که می‌گفتند: «ریاضی در زندگی روزمره کاربرد دارد»، ولی هیچ‌وقت به اندازه دیروز درستی این گفته را احساس نکرده بودم. برای خرید وسایل مورد نیاز مدرسه با مادرم به یک مرکز خرید رفته بودم. فروشگاه‌های اجناس خود را با درصدهای مختلف تخفیف، می‌فروخت. برخی از اجناس با ۱۰٪، برخی با ۲۵٪ و برخی با ۵۰٪ تخفیف به فروش می‌رسیدند. در صف صندوق پرداخت، نفر جلویی ما که سه جفت جوراب برداشته بود، گفت که قیمت‌های حراج خیلی مناسب است؛ هر جفت جوراب قبل از تخفیف ۵,۰۰۰ تومان بوده اما با ۲۰٪ تخفیف، سه جفت جوراب فقط ۶,۰۰۰ تومان شده است. از او پرسیدم چگونه حساب کرده است. گفت: سه تا ۵,۰۰۰ تومان، ۱۵,۰۰۰ تومان. سه تا ۲۰٪ هم ۶,۰۰۰ تخفیف. پس باید ۴۰٪ بپردازم. ۴۰٪ از ۱۵,۰۰۰ تومان هم می‌شود ۶,۰۰۰ تومان.

من هم که یک پیراهن با قیمت اولیه ۳۰,۰۰۰ تومان و ۵۰٪ تخفیف، و یک شلوار با قیمت اولیه ۵۰,۰۰۰ تومان و ۱۰٪ تخفیف برداشته بودم، با روشی که او گفته بود شروع به محاسبه کردم. کل خریدم ۸۰,۰۰۰ تومان بود و با در نظر گرفتن ۶۰٪ تخفیف، با محاسباتی که انجام دادم، باید ۳۲,۰۰۰ تومان می‌پرداختم. نوبت به نفر جلویی من رسید. صندوق‌دار گفت: ۱۲,۰۰۰ تومان. او با لحنی اعتراض‌آمیز گفت: «اشتباه است! من باید ۶,۰۰۰ تومان بدهم». بعد هم روش محاسبه خود را برای صندوق‌دار توضیح داد. صندوق‌دار هم با تعجب گفت: پس اگر دو جفت جوراب دیگر هم بردارید، لابد همه جوراب‌ها مجانی می‌شوند! نفر جلوی من گفت: جدی؟!!

نفر جلویی من هنوز متوجه مسئله نشده بود؛ اما من در یک لحظه فهمیدم که هر دو ما چه اشتباهی کرده‌ایم!



درصد از مفاهیمی است که در زندگی روزمره کاربردهای بسیاری دارد. اشتباهی که در وضعیت داستان صفحه قبل رخ داده بود، از اشتباهاتی است که برای برخی افراد ممکن است پیش بیاید. با انجام دادن فعالیت زیر، با مفهوم درصد بیشتر آشنا می‌شوید.

فعالیت ۱



هنرجویان هنرستانی در یک کار فوق برنامه مشارکت داشته‌اند. ۱۰ درصد از کلاس اول، ۲۰ درصد از هنرجویان کلاس دوم و ۳۰ درصد از هنرجویان کلاس سوم در این کار شرکت کرده‌اند. تعداد هنرجویان کلاس اول ۳۰ نفر، کلاس دوم ۲۵ نفر و کلاس سوم ۴۰ نفر است.

الف) از هر کلاس چند نفر در کار فوق برنامه شرکت داشته‌اند؟

.....

ب) چند درصد از مجموع هنرجویان این سه کلاس در کار فوق برنامه شرکت کرده‌اند؟

.....

پ) یکی از هنرجویان پاسخ سؤال «ب» را با جمع درصدهای هنرجویان شرکت کننده از این سه کلاس به دست آورد. آیا راه حل او درست است؟

.....

ت) یکی از هنرجویان گفت: برای محاسبه درصد شرکت کنندگان سه کلاس در کار فوق برنامه، می‌توانیم میانگین درصد شرکت کنندگان این سه کلاس را حساب کنیم. آیا نظر او درست است؟ چرا؟ توضیح دهید.

.....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که درصدهای یک کمیت را که در موارد مختلف به دست آمده‌اند، جمع کردن یا پیدا کردن میانگین آنها معنای خاصی ندارند.

کاردرکلاس ۱



۱) برای خرید سه جفت جوراب هر جفت به قیمت ۵,۰۰۰ تومان، پس از ۲۰٪ تخفیف، چقدر باید بپردازیم؟

.....

۲) برای خرید پیراهنی به قیمت ۳۰,۰۰۰ تومان با ۵۰٪ تخفیف و یک شلوار به قیمت ۵۰,۰۰۰ تومان با ۱۰٪ تخفیف، چقدر باید بپردازیم؟

.....

در زندگی روزمره، در بسیاری از مواقع ماشین حساب یا کاغذ و مداد به همراه نداریم و لازم است درصدها را خیلی سریع و به صورت ذهنی محاسبه کنیم.

مثال ۱

۹۰٪ از ۳۰,۰۰۰ چقدر است؟

۹۰٪ یک مقدار، ۹ برابر ۱۰٪ آن مقدار است. پس با توجه به آنکه ۱۰٪ از ۳۰,۰۰۰ برابر ۳,۰۰۰ است، ۹ برابر آن ۲۷,۰۰۰ می‌شود.

کار در کلاس زیر به شما کمک می‌کند که در پیدا کردن درصد به صورت ذهنی مهارت پیدا کنید.

کاردرکلاس ۲



۲٪ از ۳۰,۰۰۰ تومان، ۶۰۰ تومان است. محاسبه‌های زیر را به صورت ذهنی انجام دهید و در هر مورد، روش محاسبه خود را توضیح دهید.

(۱) ۴٪ از ۳۰,۰۰۰ تومان

(۲) ۱۰٪ از ۳۰,۰۰۰ تومان

(۳) ۹۲٪ از ۳۰,۰۰۰ تومان

(۴) ۵۰٪ درصد ۳۰,۰۰۰ تومان را به چند روش می‌توانید پیدا کنید؟ روش‌های خود را توضیح دهید.

در بسیاری از مواقع، اگر درصدی از یک مقدار را بدانید، می‌توانید درصدهای دیگری از همان مقدار را به دست آورید. در برخی موارد دیگر، راه ساده‌تر این است که درصد را به کسر تبدیل کنیم. برای مثال، پیدا کردن یک‌چهارم ۱۲۴ (عدد ۳۱ است) از پیدا کردن ۲۵٪ آن مقدار ساده‌تر است؛ کافی است آن را بر ۴ تقسیم کنیم. در برخی مواقع نیز می‌توانیم به کمک کسر، درصدی از یک مقدار را به طور تقریبی بیان کنیم؛ برای مثال، به جای پیدا کردن $۳۳\frac{۱}{۳}$ درصد از ۳۶۹، بهتر است $\frac{۱}{۳}$ آن را (که عدد ۱۲۳ است) به دست آوریم؛ زیرا $۳۳\frac{۱}{۳}$ تقریباً $\frac{۱}{۳}$ است.

کاردرکلاس ۳



(۱) ۳۳ درصد ۳۰,۰۰۰ تومان را به چند طریق می‌توانید پیدا کنید؟ روش‌های خود را توضیح دهید.

(۲) اگر بخواهید $۱۲\frac{۱}{۳}$ ٪ عدد ۱۶۰ را به طور ذهنی به دست آورید، چگونه عمل می‌کنید؟



۱) یک دروازه‌بان در بازی اول خود ۹ توپ از ۱۰ توپی را که به طرف دروازه زده شده بود، مهار کرد. این دروازه‌بان در بازی دوم خود ۵ توپ از ۸ توپ و در بازی سوم خود ۶ توپ از ۷ توپ فرستاده شده به طرف دروازه را مهار کرد.

الف) در هر بازی، این دروازه‌بان چند درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟

.....

ب) او در این سه بازی روی هم چند درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟

.....

پ) آیا جمع درصد توپ‌های مهار شده در این سه بازی معنای خاصی دارد؟

.....



۲) تعداد پاسخ‌های درست محمد به سؤال‌های سه آزمون، در جدول زیر آورده شده است: الف) جدول را کامل کنید.

ب) درصد کل پاسخ‌های درست در سه آزمون را پیدا کنید.

شماره آزمون	تعداد سؤال‌های آزمون	تعداد پاسخ‌های درست	درصد پاسخ‌های درست
۱	۹	۷	...
۲	۶	...	۱۰۰٪
۳	۱۰	۷	...

۳) با توجه به اینکه ۳۵٪ عدد ۲۲۰۰ برابر ۷۷۰ است، محاسبات زیر را به صورت ذهنی انجام دهید:

الف) ۷ درصد ۲۲۰۰ ب) ۷۰ درصد ۲۲۰۰ پ) ۵ درصد ۲۲۰۰

ت) ۳/۵ درصد ۲۲۰۰ ث) ۱۴ درصد ۲۲۰۰ ج) ۲۱ درصد ۲۲۰۰

۴) هر عدد در ستون اول جدول زیر با توصیفی در ستون دوم بیان شده است. هر عدد را به توصیف آن ارتباط دهید و برای هر یک، مثالی بیاورید.

مثال	توصیف	درصد
	من نصفِ نصف هستم.	۲۵٪
	من با یک برابرم.	۵۰٪
	من از یک چهارم کمتر، ولی از یک صدم بیشتر هستم.	۳۰٪
شانس رو یا پشت آمدن در پرتاب یک سکه	من با $\frac{1}{3}$ برابرم.	۱٪
	من از نصف کمتر و از یک چهارم بیشترم.	۱۰٪
	من از $\frac{1}{100}$ کمترم.	۱۰۰٪
	من یک دهمِ یک دهم هستم.	۳۰۰٪
	من از یک بیشترم.	$\frac{1}{3}$ ٪

۵) سعید گفت اگر به عددی ۱۰ تا اضافه کنم و سپس، ۱۰ تا از حاصل کم کنم، همان عدد قبلی به دست می‌آید. حالا اگر ۱۰٪ عددی را به آن اضافه کنم و سپس ۱۰٪ حاصل را از آن (حاصل) کم کنم، آیا همان عدد اول به دست می‌آید؟ با یک مثال عددی، پاسخ سؤال سعید را به دست آورید.

۶) درصدی بنویسید که کسر معادل آن از $\frac{1}{4}$ بیشتر و از $\frac{3}{4}$ کمتر باشد.

۷) مسعود گفت: من می‌توانم مسئله‌های مربوط به درصد را به صورت ذهنی و خیلی سریع حساب کنم. سعید پرسید: مثلاً سریع بگو ۹۰ درصد ۵۵ چقدر می‌شود؟ او به سرعت گفت: $۴۹/۵ = ۵/۵ - ۵۵$. سعید پرسید: ۶ درصد ۱,۴۰۰ چقدر می‌شود؟ مسعود گفت: $۸۴ = ۱۴ \times ۶$. سعید پرسید: ۲۵٪ عدد ۴۴ چقدر می‌شود؟ مسعود گفت: $۱۱ = ۴ \div ۴۴$. سعید گفت: ۲۵٪ درصد حقوق من ۱۲۰,۰۰۰ تومان است. حقوق من چقدر است؟ او به سرعت جواب داد: ۴۸۰,۰۰۰ تومان.
در هر حالت، روش محاسبه مسعود را توضیح دهید.

۸) الف (۴۹/۵)، چند درصد ۳۳ است؟

ب) چند درصد از ۹۰، برابر با ۸۰ است؟

۹) نرگس از فروشگاه (الف) و ناهید از فروشگاه (ب) دو کیف کاملاً یکسان خریدند. قیمت اولیه کیف در هر دو فروشگاه برابر بود. در زیر، تبلیغ فروش دو فروشگاه را می‌بینید.

فروشگاه (ب)

۲۵ درصد تخفیف + ۱۰ درصد تخفیف هدیه به مناسبت بازگشایی مدارس

فروشگاه (الف)

همه اجناس فروشگاه با ۳۵ درصد تخفیف به فروش می‌رسد

کدام یک مبلغ بیشتری پرداخته است؟ نرگس یا ناهید؟

۲-۲- درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱

قرار بود برای روزنامه دیواری مدرسه خبرهایی در زمینه رشد فناوری در سال‌های گذشته جمع‌آوری کنم. در حال جست و جو در سایت‌های مختلف بودم که ناگهان خبر زیر نظرم را جلب کرد. ولی هر چه

سعی کردم آن را تفسیر کنم، نتوانستم.



دستاورد ۱۲۵٪؟ درصدهایی که تاکنون با آنها کار کرده بودم، کمتر از ۱۰۰٪ بودند. همیشه فکر می‌کردم که **درصدی از یک کل** باید از ۱، یعنی ۱۰۰٪، کمتر باشد. پس، درصدی که مقدار آن بیشتر از ۱۰۰٪ باشد، که از یک کل بیشتر می‌شود! چه معنایی دارد؟ برای اینکه از درستی خبری که پیدا کرده بودم مطمئن شوم، این سؤال‌ها را با مسئول تهیه خبرنامه مدرسه در میان گذاشتم. او گفت: رشته من ریاضی نیست ولی با اطلاعاتی که درباره درصد دارم، برایت توضیح می‌دهم.

آیا تا به حال شنیده‌ای که قیمت تمام شده یک جفت کفش در کارخانه ۳۰,۰۰۰ تومان است ولی این کفش در فروشگاه ۹۰,۰۰۰ تومان فروخته می‌شود؟
گفتم: بله.

گفت: می‌توانی توضیح بدهی یعنی چه؟

گفتم: بله، یعنی قیمت کفش در فروشگاه سه برابر قیمت تمام شده آن در کارخانه است.

گفت: فکر می‌کنم در درس ریاضی، اگر بخواهید نسبت قیمت کفش در فروشگاه را به قیمت کفش در کارخانه بنویسید، چنین می‌نویسید: ۹۰,۰۰۰ به ۳۰,۰۰۰ یا ۳ به ۱. یعنی، قیمت کفش در فروشگاه سه برابر قیمت تمام شده کفش در کارخانه است؛ درست است؟

گفتم: بله.

گفت: اگر بخواهید این نسبت را با درصد نمایش بدهید، آن را چگونه می‌نویسید؟

$$\frac{3}{1} \times 100 = 300\%$$

گفت: امیدوارم از جوابی که دادید، متوجه موضوع شده باشید. از درصد همیشه برای بیان جزئی از یک کل استفاده نمی‌شود؛ بلکه از آن برای مقایسهٔ مقادیر یک کمیت در زمان‌ها یا شرایط مختلف نیز استفاده می‌کنند. در این وضعیت است که درصد می‌تواند مقداری بیشتر از ۱۰۰٪ را نیز نشان دهد.

پرسیدم: با این حساب، آیا درصد کمتر از ۱٪ هم داریم؟

گفت: البته! در این وضعیت، درصد هم می‌تواند مفهوم جزئی از کل را داشته باشد و هم مقایسه را نشان می‌دهد.

نرخ مرگ‌ومیر شهروندان یکی از شاخصه‌های سلامت و پیشرفت و بهداشت و درمان در دنیا است.

براساس آخرین آمارهای سازمان بهداشت جهانی، نرخ مرگ‌ومیر در ایران در طول چهار سال گذشته در مردان بیش از ۳۶۰ درصد و در بانوان بیش از ۶۰۰ درصد کاهش یافته است. هر چند که در بازه زمانی سال‌های جنگ این روند برای مردان به دلیل تقدیم شهدای گران‌قدر دفاع مقدس روند متفاوتی داشته است.

(برگرفته از کتاب ۴۰ دستاورد آقای پژمان پورجباری)

مثال ۲

تعداد اعضای یک کانون ورزشی در آغاز تأسیس ۲۴ نفر بود. بعد از شش ماه و با تبلیغات بسیار، در حال حاضر ۸۵ نفر عضو این کانون هستند. در بررسی این خبر می‌بینیم که در مدت تأسیس کانون تا این زمان، عضویت در این کانون بیشتر از سه برابر تقریباً ۳۵۴٪ $\approx \frac{85}{24} \times 100$ شده است. در این مثال، مقادیر یک کمیت در دو زمان متفاوت مورد مقایسه قرار گرفته است.

مثال ۳

در سال ۱۳۹۰ در یک سرشماری، تعداد افرادی که به یک لهجهٔ خاص صحبت می‌کردند ۰/۹٪ جمعیت ایران اعلام شد. اگر جمعیت ایران به طور تقریبی در آن سال ۷۸ میلیون نفر بوده باشد، چند نفر به آن لهجه صحبت می‌کرده‌اند؟

$$\frac{0.9}{100} = 0.009 \text{ یعنی: } 0.9\%$$

$$0.009 \times 78,000,000 = 702,000 \text{ نفر داریم}$$

مثال ۴

برای پیدا کردن مقدار $\frac{1}{4}\%$ مقدار 120 به صورت ذهنی، ابتدا می‌توان گفت که 1% از 120 برابر است با $1/2$. در نتیجه داریم: $1/2 \div 4 = 0/3$

مثال ۵

برای پیدا کردن مقدار تقریبی 249% از 120 به صورت ذهنی می‌توان گفت که 249% تقریباً برابر است با 250% که به معنای دو و نیم برابر آن است. پس داریم: $2/5 \times 120 = 300$.

(۱) $0/2\%$ از 3 میلیون نفر، چند نفر می‌شود؟

کاردکلاس ۴



(۲) 5 نفر از $4,000$ نفر چند درصد این افرادند؟

(۳) 140% از 400 لیتر آب، چند لیتر آب است؟

(۴) وزن مریم در هنگام تولد 3 کیلوگرم بوده و در ده سالگی 21 کیلوگرم است. وزن او در ده سالگی چند درصد وزن نوزادی‌اش است؟

(۵) مثالی بیان کنید که مقدار نهایی، 124 درصد مقدار اولیه باشد. آن را تفسیر کنید.

(۶) مثالی بیان کنید که مقدار نهایی، $0/8\%$ مقدار اولیه باشد و آن را تفسیر کنید.

برای محاسبه درصدی از یک مقدار، می‌توانیم درصد را به صورت کسر بنویسیم و کسری از یک مقدار را پیدا کنیم. همچنین همان‌طور که مشاهده کردید، می‌توانیم به صورت ذهنی و با روش‌هایی مانند روش صفحه قبل آن را یافت. یکی از روش‌هایی که به کمک آن می‌توانیم مسئله‌های مرتبط با درصد را حل کنیم، نمایش مسئله درصد با معادله است.

فعالیت ۲



(۱) یک تساوی با عبارت ضربی بنویسید که به کمک آن بتوان $\frac{2}{3}$ از ۲۴ را پیدا کرد.

(۲) با توجه به اینکه درصد را می‌توانیم با یک عدد کسری نمایش دهیم، یک تساوی با عبارت ضربی بنویسید که به کمک آن بتوان ۳۰٪ از ۳۶ را پیدا کرد.

(۳) یک تساوی با عبارت ضربی در حالت کلی بنویسید که به کمک آن بتوان درصدی از یک مقدار را پیدا کرد. در این معادله، مقدار اولیه را با X ، درصد را با a و مقدار نهایی را با Y نشان دهید.

(۴) سه مسئله را طوری طرح کنید که در یکی Y ، و در یکی a و در یکی X مجهول باشد.

فعالیت بالا نشان می‌دهد که مسئله‌های مرتبط با درصد را همواره می‌توان به کمک معادله حل کرد. برای این کار مهم‌ترین مرحله، تشخیص مجهول است.

مثال ۶

علی ماهانه ۱,۸۰۰,۰۰۰ تومان حقوق دریافت می‌کند. از این مبلغ ۷٪ مالیات کم می‌شود. حقوق احمد بعد از کسر مالیات ۱,۷۵۰,۰۰۰ تومان است. حقوق کدام‌یک بیشتر است؟

$۱۲۶,۰۰۰ = ۰/۰۷ \times ۱,۸۰۰,۰۰۰ = \text{حقوق} \times \text{درصد مالیات} = \text{مقدار مالیاتی که از حقوق علی کم می‌شود}$

$$\text{مبلغ دریافتی} = \text{حقوق} - \text{مقدار مالیات} = ۱,۸۰۰,۰۰۰ - ۱۲۶,۰۰۰ = ۱,۶۷۴,۰۰۰$$

پس، حقوق احمد بیشتر است.

این مسئله را به صورت دیگری نیز می‌توانیم حل کنیم. اگر حقوق احمد را با A نمایش دهیم، داریم:

$$\text{دریافتی احمد} = A - (۰/۰۷ \times A) = A \times (۱ - ۰/۰۷) = ۰/۹۳ \times A$$

$$۱,۷۵۰,۰۰۰ = ۰/۹۳ \times A \Rightarrow A = \frac{۱,۷۵۰,۰۰۰}{۰/۹۳} \approx ۱,۸۸۱,۷۲۰$$

یعنی، حقوق احمد قبل از کسر مالیات تقریباً ۱,۸۸۰,۰۰۰ تومان است.

کارد در کلاس ۵



علی در یک تعمیرگاه لوازم خانگی کار می‌کند. به ازای هر دستگاهی که تعمیر می‌شود، ۷۰٪ هزینه تعمیر را علی و بقیه را صاحب تعمیرگاه دریافت می‌کند.

الف) معادله‌ای بنویسید که رابطه بین هزینه‌های دریافتی و پولی را که علی دریافت می‌کند نشان دهد.

.....

.....

ب) اگر علی در این ماه ۷۵۰,۰۰۰ تومان دریافت کرده باشد، صاحب فروشگاه چقدر دریافت کرده است؟

.....

.....



(۱) جدول زیر را کامل کنید.

درصد	به صورت کسر	به صورت اعشاری
۳۷/۵٪
...	$\frac{۱۱۰}{۱۰۰}$...
۱٪
...	...	۰/۰۰۵
...	$\frac{۱}{۸}$...
$\frac{۲}{۵}$ ٪

(۲) $۰/۷$ یک مقدار بیشتر است یا $۰/۷٪$ همان مقدار؟ چرا؟

.....

(۳) یک نوع کالا در فروشگاه‌های الف و ب با تخفیف ارائه شده است: در فروشگاه الف قیمت پس از تخفیف $۱۵۰,۰۰۰$ ریال و در فروشگاه ب قیمت قبل از تخفیف $۲۰۰,۰۰۰$ ریال می‌باشد. اگر درصد تخفیف فروشگاه الف برابر $۲۰٪$ و فروشگاه ب برابر $۲۵٪$ باشد: الف) قبل از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه‌تر است؟

.....

ب) بعد از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه‌تر است؟

.....

۲-۳- درصد تغییر

آیا تاکنون به این مسئله فکر کرده‌اید که در بازار سهام، چگونه تصمیم‌گیری می‌کنند؟ افرادی که در این حوزه فعالیت دارند، باید بتوانند درصد تغییر قیمت سهام مختلف را با هم مقایسه کنند. در بسیاری از گزارش‌های دولتی، تغییرات در سال‌های مختلف را با درصد تغییر بیان می‌کنند. فعالیت ۳ در درک این مفهوم به شما کمک می‌کند.



در علم اقتصاد، بورس به بازاری اطلاق می‌شود که قیمت‌گذاری و خرید و فروش کالا و اوراق بهادار در آن انجام می‌پذیرد.

واژه **بورس (Bourse)** در زبان فرانسوی به معنای کیف پول است. در اوایل قرن پانزدهم میلادی، فردی هلندی به نام **واندر بورس (Vander Bourse)** زندگی می‌کرده است که صرافان شهر در مقابل خانه او به داد و ستد کالا و اوراق بهادار می‌پرداختند. از این رو بعدها کلیه مکان‌هایی که در آنها داد و ستد پول، کالا و اسناد مالی و تجاری صورت می‌گرفت، **بورس** گفته شد. بورس ایران در سال ۱۳۴۶ راه‌اندازی شد.

خواندنی ۱





قیمت کالایی در سال گذشته x تومان بود. امسال این کالا با ۱۵٪ افزایش قیمت به فروش می‌رسد. مقدار افزایش قیمت کالا را بر حسب x بنویسید.

$$\dots = \dots \times \dots = \dots$$

اگر قیمت جدید کالا را با y نشان دهیم، معادله‌ای بر حسب x بنویسید که بتوانید به کمک آن قیمت جدید کالا را حساب کنید.

$$\dots + \dots = y$$

به کمک معادله بالا، درصد افزایش قیمت را بر حسب x و y بنویسید.

$$\frac{\dots - \dots}{\dots} = ۱۵\% \text{ یا } ۰/۱۵$$

اگر تغییر قیمت $a\%$ باشد، درصد تغییر قیمت را بر حسب قیمت اولیه و قیمت جدید بنویسید.



برای هر کمیتی مقدار $\frac{\text{میزان تفاوت در مقدار}}{\text{مقدار اولیه}} = \frac{\text{مقدار اولیه} - \text{مقدار نهایی}}{\text{مقدار اولیه}}$ را

نسبت تغییر و حاصل $(\times 100)$ نسبت تغییر را درصد تغییر آن کمیت می‌نامند.

مثال ۷

وزن نوزادی در هنگام تولد $\frac{3}{5}$ کیلوگرم بود. در معاینه بعدی، وزن او $\frac{5}{5}$ کیلوگرم بود. درصد افزایش وزن کودک چقدر بوده است؟

$$\frac{5 - \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} \approx ۰/۴۳$$

بنابراین، این کودک ۴۳٪ افزایش وزن داشته است.

مثال ۸

یک کتاب‌فروشی در آذر ماه ۳۰۰ جلد کتاب کمتر از ماه آبان فروخته است. اگر در ماه آبان ۱,۲۰۰ جلد کتاب فروخته شده باشد، درصد تغییر میزان فروش این کتاب‌فروشی چقدر است؟

$$\frac{۹۰۰-۱۲۰۰}{۱۲۰۰} = \frac{-۳۰۰}{۱۲۰۰} = -۰/۲۵$$

علامت منفی نشان‌دهنده کاهش فروش است. بنابراین، فروش این کتاب‌فروشی با ۲۵٪ کاهش، روبه‌رو بوده است.

مثال ۹

ابعاد یک زمین بازی ۱۰متر × ۲۰متر است. شهرداری تصمیم دارد این زمین را از هر طرف، ۲متر گسترش دهد. مساحت زمین چند درصد افزایش خواهد یافت؟

۲ متر	۲۰ متر	۲ متر
۲ متر	۲۴ متر	۲ متر

۲۰۰ = ۲۰ × ۱۰ : مساحت اولیه زمین (متر مربع)

۳۳۶ = ۲۴ × ۱۴ : مساحت جدید زمین (متر مربع)

$$\text{درصد تغییر مساحت} : \frac{۳۳۶-۲۰۰}{۲۰۰} = ۰/۶۸$$

بنابراین، مساحت زمین ۶۸٪ افزایش دارد.

مثال ۱۰

به گزارش زیر توجه کنید :

« چین پرجمعیت‌ترین کشور جهان است. جمعیت این کشور در سال ۲۰۰۵ تقریباً ۱/۳ میلیارد نفر بود. با وجود قانون حداکثر یک فرزند برای هر خانواده، جمعیت چین با نرخ ۰/۶٪ در هر سال افزایش

یافت. دومین کشور پر جمعیت دنیا در سال ۲۰۰۵، کشور هند با ۱/۱ میلیارد نفر جمعیت بود. نرخ مرگ و میر سالانه ۰/۸٪ بود. «
 گزارش بالا به این معناست که نرخ افزایش جمعیت در چین از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۰۶ برابر ۰/۶٪ بوده است. بر مبنای این گزارش جمعیت چین در سال ۲۰۰۶ چنین تخمین زده شد:

$$\frac{0/6}{100} = \frac{x-1/3}{1/3} \Rightarrow x = 0/006 \times 1/3 + 1 = 1/0912 \text{ میلیارد نفر}$$

نرخ مرگ و میر به معنای درصد کم شدن جمعیت برحسب مرگ و میر است و باید این درصد را به صورت یک عدد منفی در نظر بگیریم. اگر x تعداد جمعیت به دلیل مرگ و میر باشد، داریم:

$$-\frac{0/8}{100} = \frac{x-1/1}{1/1} \Rightarrow x = 0/008 \times 1/1 + 1/1 = 1/0912 \text{ میلیارد نفر}$$

۱) ابعاد یک پارک به طول x و عرض y را ۱۰٪ افزایش داده‌اند. درصد تغییر مساحت این پارک را محاسبه کنید.

کاردکلاس ۶



۲) قیمت بلیت یک موزه در ابتدای سال ۲۰٪ افزایش داشته و پس از سه ماه، دوباره ۱۰٪ افزایش یافته است. قیمت بلیت این موزه در سال گذشته ۱,۰۰۰ تومان بوده است.
 الف) قیمت بلیت این موزه اکنون چقدر است؟

ب) درصد تغییر قیمت بلیت این موزه نسبت به سال قبل چقدر است؟ (توجه: ۳۰٪ نیست!)



(۱) در هر پرانتز عبارت درست را مشخص کنید:

(الف) اگر قیمت جدید یک کالا نسبت به قیمت اولیه افزایش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/منفی) و اگر کاهش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/منفی) می‌باشد.

(ب) اگر قیمت کالایی ۵,۵۰۰ تومان باشد و قیمت آن به ۷,۰۰۰ تومان رسیده باشد، درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰؛ بین ۱ و ۱۰۰؛ کوچک‌تر از ۱) و اگر قیمت آن به ۱۲,۰۰۰ تومان رسیده باشد درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰؛ کوچک‌تر از ۱۰۰) می‌باشد.

(۲) اگر قیمت اولیه یک کالا با x و قیمت جدید آن با y مشخص شده باشد، معادله $y = \frac{1}{4}x$ رابطه بین قیمت اولیه و قیمت جدید این کالا را نشان می‌دهد.
(الف) درصد تغییر را به دست آورید.

(ب) کالایی که در سال گذشته ۱۰۰ هزار تومان بوده است، امسال چند تومان است؟

(پ) کالایی که امسال ۱۰۰ هزار تومان است، در سال گذشته چند تومان بوده است؟

(۳) قیمت ۴ نوع کالای الف و ب و پ و ت در سال جاری نسبت به سال گذشته طبق جدول زیر تغییر داشته است:

(الف) جدول را تکمیل کنید.

(ب) این چهار کالا را در یک سبد به نام **سبد کالا** در نظر بگیرید. درصد تغییر قیمت این سبد کالا چقدر است؟

نوع کالا	قیمت سال گذشته	قیمت امسال	درصد تغییر
الف	۱۰۰,۰۰۰	۱۱۵,۰۰۰	...
ب	...	۱۵۰,۰۰۰	۲۰٪
پ	۱۵۰,۰۰۰	...	۱۰٪
ت	۲۰۰,۰۰۰	...	-۱۰٪

(۴) طول هر ضلع یک مکعب بر اثر گرما ۱/۰ واحد افزایش یافته است. اگر طول ضلع اولیه این مکعب ۱ واحد باشد، درصد تغییر حجم مکعب را حساب کنید.



پودمان سوم

معادله‌های درجه دوم



رایج‌ترین آزمون سرعت عکس‌العمل در تربیت بدنی آزمون خط‌کش است. برای اجرا کردن این آزمون، دست‌های آزمودنی را طوری در کنار لبه میز قرار می‌دهند که انگشت شست و سبابه او به طور موازی با یکدیگر قرار گیرند. سپس نقطه صفر خط‌کش را مقابل لبه بالایی دست قرار می‌دهند و در عرض سه ثانیه آن را رها می‌کنند. فرد باید به محض رها شدن خط‌کش، آن را با دست بگیرد. به نظر شما اگر فردی خط‌کش را در فاصله ۴/۹ سانتی‌متری پس از رها شدن بگیرد، زمان عکس‌العمل او چقدر بوده است؟

۳-۱- مفهوم معادله‌های درجه دوم

مادر زهرا از کارآفرینان نمونه کشور است. او یک کارگاه تولید صنایع دستی دارد که افراد زیادی در آنجا مشغول به کارند. برای تأمین هزینه‌ها، لازم است که این کارگاه سه میلیون تومان درآمد ماهیانه داشته باشد. مادر زهرا برای کسب درآمد مورد نظر باید بداند چه تعداد کالا تولید شود و به فروش برسد. او برای یافتن جواب این سؤال‌ها، نظر مشاور مالی کارگاه را جویا می‌شود.

مشاور می‌گوید: برای افزایش درآمد می‌توان قیمت کالا را افزایش داد اما با این کار، ممکن است تعداد مشتری‌ها کم و درآمد کمتر شود. یک راه دیگر، افزایش تولیدات است ولی ممکن است همه تولیدات به فروش نرسند و مجبور شویم قیمت را پایین بیاوریم. به این ترتیب، ممکن است درآمد باز هم کمتر شود. باید حساب شده عمل کنیم و رابطه بین تعداد کالای تولید شده و سود به دست آمده را به طور دقیق حساب کنیم.

با بررسی آمار فروش دوره‌های گذشته، می‌توان رابطه بین قیمت کالا و میزان کالای به فروش رفته را پیدا کرد. بر اساس این اطلاعات، اگر قیمت کالا را با p نشان دهیم و x تعداد کالای فروش رفته با این قیمت باشد، رابطه $x = 60,000 - 300p$ به طور تقریبی بین آنها برقرار است.

از طریق این معادله می‌توان پیش‌بینی کرد که اگر قیمت یک واحد کالا p باشد، طبق رابطه بالا، به تعداد x واحد از آن کالا به فروش می‌رسد. بر این اساس، در چنین وضعیتی چند واحد کالا باید تولید شود تا با فروش آنها درآمد کارگاه سه میلیون تومان شود؟ فعالیت صفحه بعد به شما در حل این مسئله کمک می‌کند.





۱) با استفاده از رابطه $x = 60,000 - 300p$ مقدار p را بر حسب x به دست آورید.

۲) درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با $R = x.p$ نشان می دهند. معادله درآمد را بر حسب x بنویسید.

۳) چند جمله ای درآمد بر حسب x از درجه چند است؟

۴) اگر درآمد حاصل از فروش، ماهیانه سه میلیون تومان باشد، چه معادله ای برای x به دست می آید؟

معادله هایی مانند معادله به دست آمده از فعالیت بالا را **معادله درجه دوم** می نامند. در بسیاری از مسئله های کاربردی، به این گونه معادله ها برخورد می کنیم.



معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن a و b و c اعداد حقیقی مشخصی هستند و $a \neq 0$ ، معادله درجه دوم نامیده می شود. مقادری برای x که به ازای آنها تساوی برقرار می شود، جواب های معادله نامیده می شوند.

مثال ۱

کدام یک از معادله‌های زیر، معادله درجه دوم هستند؟

$$\text{الف) } (3x-1)(x+2) = 6 \quad \text{ب) } (2x+1)(x-1) = 2x^2 + 3$$

معادله (الف) پس از ساده‌سازی، به شکل زیر در می‌آید.

$$(3x-1)(x+2) = 6 \quad 3x^2 + 6x - x - 2 - 6 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 5x - 8 = 0$$

بنابراین، معادله به دست آمده، معادله درجه دوم است.

اما، معادله (ب) پس از ساده‌سازی، به شکل زیر در می‌آید.

$$(2x+1)(x-1) = 2x^2 + 3 \Rightarrow 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 + 3 \Rightarrow -x - 4 = 0$$

بنابراین، معادله به دست آمده، معادله درجه اول است.

مثال ۲

زمینی مستطیل شکل به مساحت ۶۰۰ مترمربع را با ۱۰۰ متر نرده محصور کرده‌ایم. طول و عرض زمین چقدر است؟

اگر طول و عرض این زمین بر حسب متر x و y در نظر گرفته شود، داریم: $xy = 600$ و $2(x+y) = 100$.
از معادله اول نتیجه می‌شود: $y = 50 - x$ و با جایگذاری در معادله دوم داریم:

$$x(50-x) = 600 \Rightarrow x^2 - 50x + 600 = 0$$

این معادله نیز یک معادله درجه دوم است. پس از یاد گرفتن روش‌های حل معادله‌های درجه دوم، می‌توانید آن را حل کنید.



در مثال ۲، از معادله $2(x + y) = 100$ ، مقدار x را بر حسب y حساب کنید و معادله ای بر حسب y بنویسید. معادله به دست آمده بر حسب x و معادله بر حسب y چه شباهتی با هم دارند؟

تاریخچه معادله



معادله ها، از اولین دستاوردهای ریاضی بشرند. آنها را می توان در قدیمی ترین اسناد ریاضی مکتوب،



مانند برخی از متون میخی بابلی های باستان و پاپیروس های مصر باستان، یافت. بنا به ساختار جامعه بابلی، مسئله های مربوط به تقسیم ارث، از اهمیت بسیاری برخوردار بودند. اولین پسر همواره بیشترین سهم را دریافت می کرد، دومی بیشتر از سومی، و به همین ترتیب.

چنین محاسباتی نسبتاً زیاد رخ می دادند و متناظر با

معادله های خطی ما هستند. پیدا کردن طول و عرض زمین هایی که مساحت مشخصی باید داشته باشند منجر به حل معادله های درجه دوم می شد. البته مفهوم معادله در آن زمان موجود نبود و فقط مسئله هایی مطرح بودند که با دستورات عملی حل می شدند.

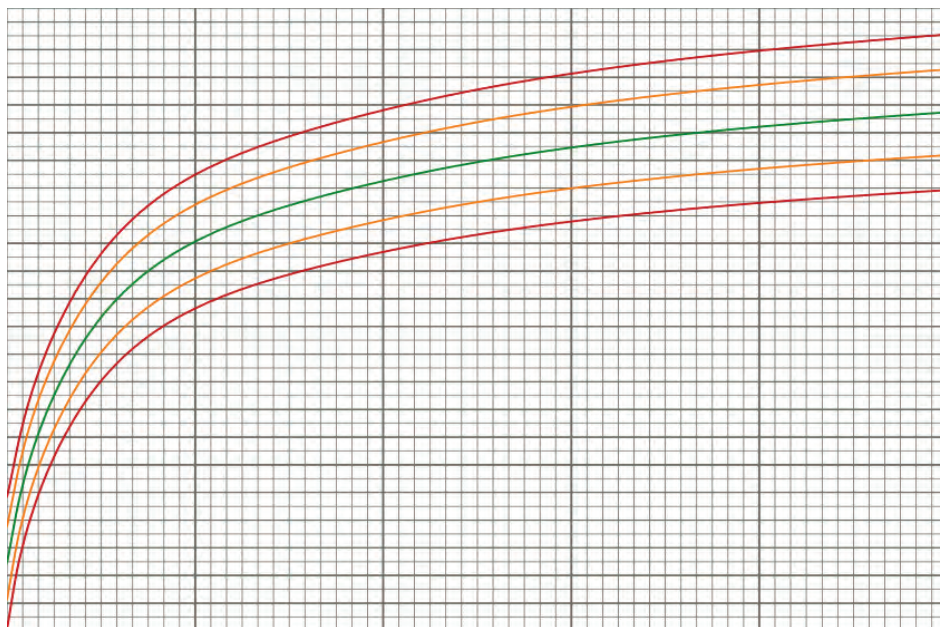
در مسئله های مطرح در بابل، مجهول نسبتاً واضح توصیف شده است و در پاپیروس های مصری با علامت h نمایش داده شده است.

پیش از اینکه زبان نمادین جبری مطرح شود، مجبور بودند معادله ها را به صورت کلامی بیان کنند. با نوشته شدن کتاب جبر و مقابله توسط خوارزمی در سده های سوم و چهارم هجری، جبر وارد ریاضیات شد و به حل معادله ها پرداخته شد. واژه **جبر** به معنای **جبران کردن** و **مقابله** به معنای **رو به رو قرار دادن دو سوی برابری** است.

۳-۲- رابطه‌های غیر خطی

در فصل‌های قبل، در مورد رابطه بین کمیت‌های متناسب بسیار کار کرده‌اید. در حالتی که دو کمیت به‌طور مستقیم با یکدیگر متناسب‌اند، مقدار هر کدام به صورت مضربی از مقدار دیگری است. در این حالت نمودار این‌گونه رابطه‌ها به صورت خط مستقیم است؛ به همین دلیل، این رابطه‌ها از نوع **رابطه‌های خطی** هستند.

در طبیعت، بسیاری از رابطه‌ها به صورت خطی نیستند. برای مثال، طول قد انسان‌ها با سن آنها رابطه دارد. آیا این رابطه یک رابطه خطی است؟ اگر این رابطه، یک رابطه خطی بود، تصور کنید طول قد انسان‌های سالمند چقدر می‌شد؟ می‌دانید که بعد از تولد، طول قد انسان افزایش پیدا می‌کند ولی میزان این افزایش در بازه‌های زمانی ثابت نیست و تقریباً بعد از بیست و دو سالگی، طول قد انسان ثابت می‌ماند. نمودار این رابطه برای یک فرد مانند شکل زیر است.



فعالیت ۲، تفاوت رابطه های خطی و غیرخطی را نشان می دهد.

رابطه طول ضلع یک مربع با محیط آن و رابطه طول ضلع یک مربع با مساحت آن را در نظر بگیرید. طول ضلع مربع را با x ، محیط آن را با P و مساحت آن را با S نشان دهید.

(۱) رابطه P و x و همچنین رابطه S و x را با دو معادله بنویسید.

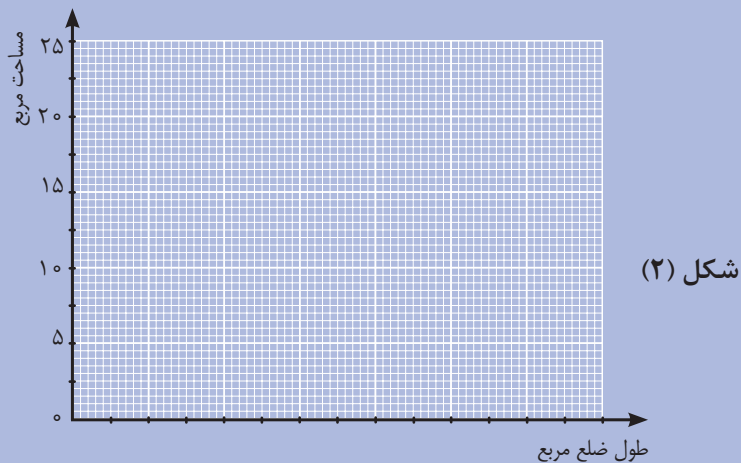
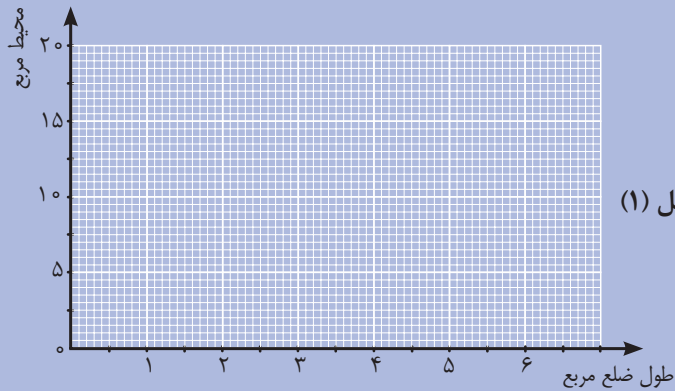
فعالیت ۲



x (طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
p (محیط مربع)
s (مساحت مربع)

(۲) جدول زیر را کامل کنید.

(۳) نقاط به دست آمده در جدول را در دو دستگاه محورهای مختصات زیر نشان دهید.



۴) جدولی رسم کنید که میزان افزایش محیط و مساحت مربع را وقتی طول ضلع آن از ۱ به ۲، از ۲ به ۳ و از ۴ به ۵ افزایش می‌یابد، نشان دهد.

۵) آیا نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

۶) آیا نسبت افزایش مساحت مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

۷) می‌خواهیم نقاط شکل (۱) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همه این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

۸) می‌خواهیم نقاط شکل (۲) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همه این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

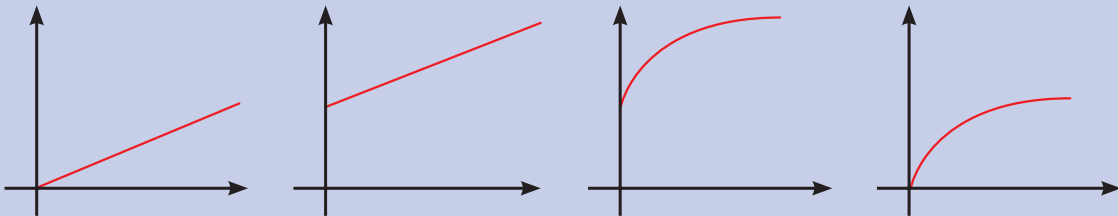
فعالیت بالا نشان می‌دهد که نمودار رابطه بین طول ضلع مربع و محیط آن به صورت خط راست است. در این حالت، نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع آن، مقداری ثابت است و این دو مقدار باهم رابطه خطی دارند. ولی نسبت افزایش مساحت مربع به طول ضلع آن، مقدار ثابتی نیست. به همین

دلیل، نمودار رابطه طول ضلع مربع و مساحت آن به صورت خط راست نیست و رابطه بین طول ضلع مربع و مساحت آن را **غیرخطی** می نامند.

کاردکلاس ۲



در شکل زیر، محور افقی نشان دهنده زمان بر حسب ماه و محور عمودی نشان دهنده وزن یک انسان بر حسب کیلوگرم است. کدام یک از نمودارهای زیر می تواند نمودار وزن یک انسان در طول زمان باشد؟



کار در کلاس زیر، نمودار یک رابطه غیرخطی مهم را بررسی می کند.

کاردکلاس ۳



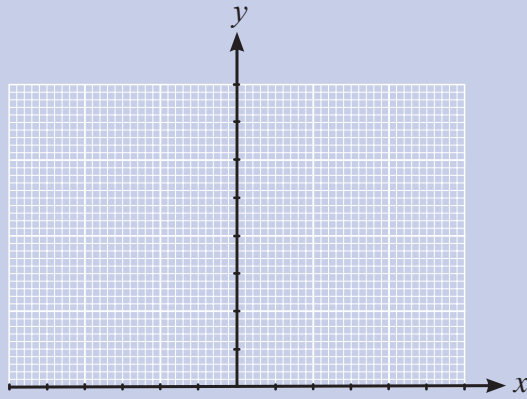
یک عدد حقیقی و مجذور آن را در نظر بگیرید. عدد حقیقی دلخواه را با x و مجذور آن (x^2) را با y نشان دهید.

(۱) رابطه بین x و y را با یک معادله نشان دهید.

(۲) جدول زیر را کامل کنید (برای محاسبه می توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

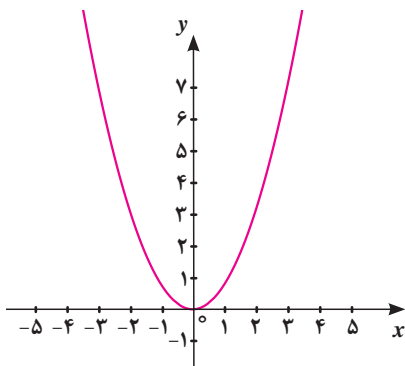
x	-۲	-۱/۸	-۱/۶	-۱/۴	-۱/۲	-۱	۰	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
y	۱/۴۴

۳) نقاط جدول صفحه قبل را روی محورهای مختصات زیر نشان دهید و نمودار رابطه $y = x^2$ را رسم کنید.

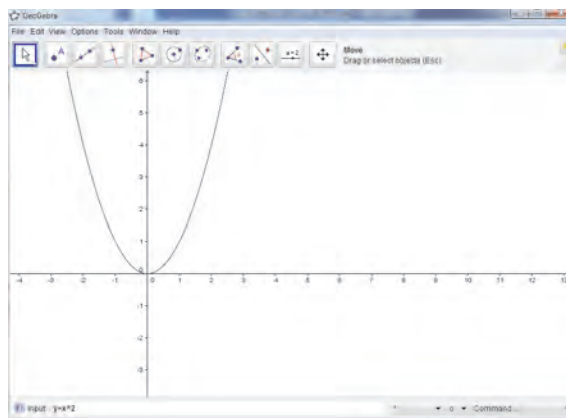


رسم نمودار با جئو جبرا

به کمک جئو جبرا، نمودار رابطه $y = x^2$ به طور دقیق تر به صورت شکل روبه رو رسم می شود.



برای رسم نمودار یک رابطه، معادله آن را در کادر پایین صفحه وارد کنید.



در وضعیت های زندگی روزمره، گاهی چند پدیده را هم زمان بررسی می کنیم. در چنین حالاتی ممکن است نمودار نمایش دهنده این پدیده ها با هم برخورد داشته باشند. در فعالیت زیر با معنا و مفهوم نقاط برخورد نمودار رابطه ها آشنا خواهیم شد.

فعالیت ۳



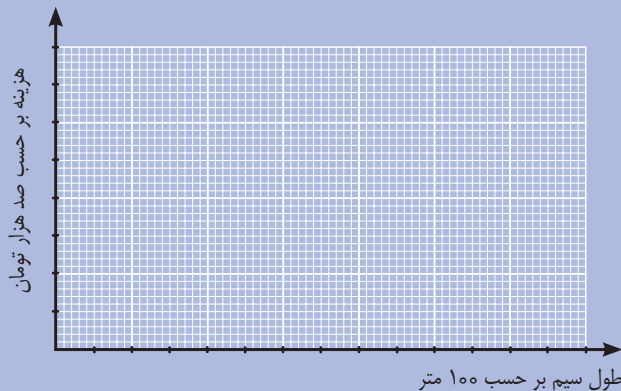
هزینه ثابت ماهیانه یک کارگاه تولید سیم برق، ۱۷۰,۰۰۰ تومان است. هزینه تهیه مواد اولیه برای هر متر سیم ۶۰ تومان و قیمت فروش هر متر سیم ۴۰۰ تومان است.

(۱) با توجه به این اطلاعات، جدول را کامل کنید.

طول سیم های فروخته شده (متر)	۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
هزینه تولید (تومان)
درآمد حاصل از فروش (تومان)

(۲) اگر x طول سیم های فروخته شده، C هزینه تولید و R درآمد حاصل از فروش سیم در یک ماه باشد، رابطه بین طول سیم های فروخته شده و هزینه و همچنین، رابطه بین طول سیم های فروخته شده و درآمد حاصل از فروش را بنویسید.

(۳) در دستگاه مختصات زیر، اگر محور افقی، طول سیم های فروخته شده بر حسب متر و محور عمودی هزینه تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب تومان در یک ماه در نظر گرفته شود، رابطه های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید (هر واحد محور افقی را ۱۰۰ متر و هر واحد محور عمودی را ۱۰۰ هزار تومان در نظر بگیرید).



۴) مختصات نقطه برخورد دو خط را بیابید.

۵) نقطه برخورد این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۶) اگر مختصات نقطه‌ای در هر دو معادله صدق^۱ کند، این نقطه در کجا قرار دارد؟

محل برخورد دو خط، نقطه‌ای است که اگر مختصات آن را در معادله‌های هر دو خط قرار دهیم، تساوی برقرار می‌شود. برعکس، اگر مختصات نقطه‌ای در هر دو معادله صدق کند، این نقطه همان محل برخورد دو خط است.

کاردکلاس ۴



یک کارگاه تولید میز تحریر در هر ماه برای پرداخت مخارج دستگاه‌هایش، سیصد و بیست هزار تومان هزینه می‌کند. هزینه مواد اولیه برای هر میز ۲۰,۰۰۰ تومان و قیمت فروش هر میز ۳۰,۰۰۰ تومان است.

۱) جدول زیر را کامل کنید.

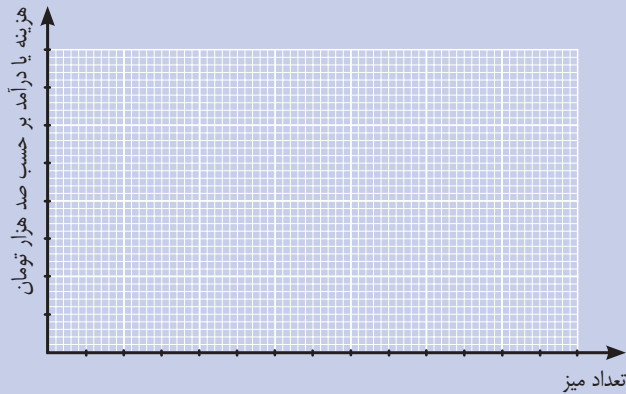
تعداد میزهای تولید شده در یک ماه	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
هزینه تولید (بر حسب هزار تومان)
درآمد حاصل از فروش (بر حسب هزار تومان)

۱- اگر با جایگذاری مختصات یک نقطه در یک معادله، تساوی برقرار شود، گوییم که مختصات نقطه در معادله صدق می‌کند.

۲) اگر در یک ماه، تعداد میزهای تولید شده x ، هزینه تولید C و درآمد حاصل از فروش R در نظر گرفته شود، رابطه بین تعداد میزها و هزینه تولید و همچنین رابطه بین تعداد میزها و درآمد حاصل از فروش در یک ماه را بنویسید.

.....

۳) در دستگاه مختصات زیر اگر محور افقی، تعداد میزهای تولید شده و محور عمودی، هزینه تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب صد هزار تومان در یک ماه را نشان دهد، رابطه های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید^۱.



۴) مختصات نقطه برخورد دو خط بالا را به صورت تقریبی بیابید.

.....

۵) نقطه تقاطع دو خط چه چیزی را نشان می دهد؟

.....

۱- اگر چه تعداد میزها، عدد حسابی و نمودار واقعی گسسته است، برای داشتن تصویر بهتری از روابط، مناسب است نمودار را یک خط فرض کنیم.

۳-۳- روش‌های حل معادله‌های درجه دوم

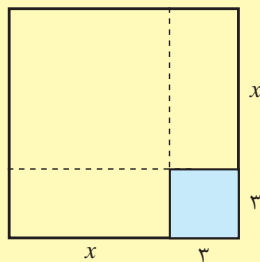
در فعالیت‌های قبل با توصیف پدیده‌ها به کمک معادله آشنا شدیم. اما برای رسیدن به جواب‌های مسئله‌هایمان، باید جواب‌های آن معادله‌ها را به دست آوریم. برای حل معادله‌ها روش‌های مختلفی وجود دارد. در فعالیت ۴، با روش هندسی حل معادله‌های درجه دوم آشنا خواهیم شد.



خوارزمی برای حل معادله‌های درجه دوم، شش حالت خاص را بررسی کرده است. از میان این حالت‌ها فقط یکی از آنها را توضیح خواهیم داد.

در این حالت، جمله ثابت C در ax^2+bx+c باید منفی باشد. برای مثال، معادله $x^2+6x-40=0$ را در نظر بگیرید. در روش خوارزمی، جمله‌هایی را که مجهول دارند،

در یک طرف تساوی نگه می‌داریم؛ عدد ثابت را به طرف دیگر می‌بریم و معادله را به صورت $x^2+6x=40$ می‌نویسیم. نصف ضریب x را حساب می‌کنیم که در این مثال، برابر ۳ است. با این محاسبات می‌توانیم، مساحت مربعی با ضلع $x+3$ را حساب کنیم.



در شکل بالا، مساحت مربع رنگی 3×3 می‌شود. مساحت قسمت باقیمانده یعنی x^2+6x برابر ۴۰ است پس، مساحت مربع بزرگ $40+9=49$ است و طول ضلع مربع بزرگ برابر $\sqrt{49}=7$ خواهد بود. پس $x+3=7$ و در نتیجه $x=4$. همه معادله‌های درجه دوم را نمی‌توان با این روش حل کرد. همچنین با این تعبیر هندسی، فقط یکی از جواب‌های معادله‌های درجه دوم به دست می‌آید.

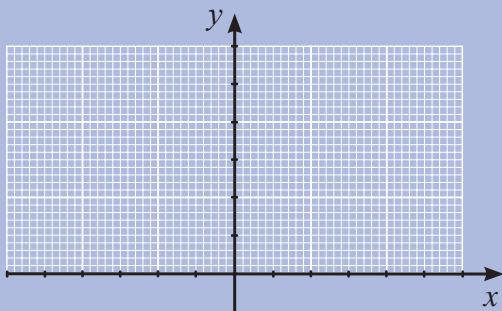
خواندنی





۱) دو رابطه $y_1 = x^2$ و $y_2 = 2x + 3$ را در نظر بگیرید و جدول زیر را کامل کنید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
x^2
$2x + 3$



۲) با استفاده از جدول بالا، نمودار

معادله های $y_1 = x^2$ و $y_2 = 2x + 3$ را

در دستگاه مختصات روبه رو رسم کنید.

۳) مختصات نقطه برخورد این دو نمودار را بیابید.

۴) آیا مختصات نقاط برخورد خط و منحنی در هر دو معادله صدق می کنند؟

۵) آیا طول های نقاط برخورد منحنی y_1 و خط y_2 در معادله $x^2 = 2x + 3$ صدق می کنند؟

فعالیت بالا نشان می دهد که طول های نقاط برخورد دو نمودار رابطه های $y_1 = x^2$ و $y_2 = 2x + 3$ جواب هایی برای معادله $x^2 = 2x + 3$ هستند. برعکس، هر جوابی از این معادله، یک نقطه برخورد نمودارهای $y_1 = x^2$ و $y_2 = 2x + 3$ را نشان می دهد. معادله $x^2 = 2x + 3$ را می توان به صورت معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 3 = 0$ نوشت. ملاحظه می شود برای یافتن جواب های یک معادله درجه دوم می توان از این شیوه کمک گرفت.

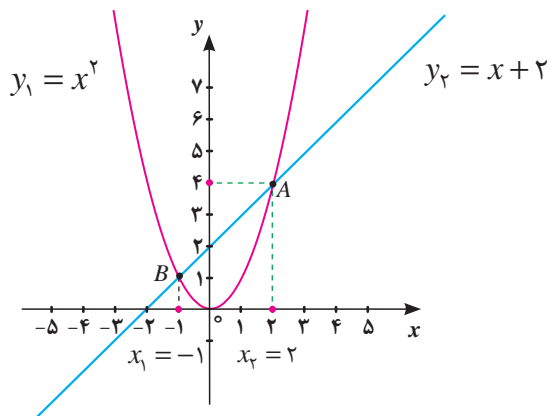
برای مثال، معادله $x^2 - 2x - 3 = 0$ را در نظر بگیرید. این معادله را به صورت $x^2 = 2x + 3$ می‌نویسیم. می‌توان گفت جواب‌های این معادله، مقدارهایی از x هستند که به ازای آنها، مقدارهای x^2 و $2x + 3$ با هم برابر می‌شوند. با رسم نمودارهای $y_1 = x^2$ و $y_2 = 2x + 3$ و مشخص کردن نقطه برخورد این دو نمودار و تعیین طول نقاط برخورد می‌توان جواب‌های معادله $x^2 - 2x - 3 = 0$ را به دست آورد. به کمک این روش، هر معادله درجه دوم دیگری را نیز می‌توانیم حل کنیم. این روش را **روش هندسی** حل معادله‌های درجه دوم می‌گویند.

مثال ۳

معادله درجه دوم $x^2 - x - 2 = 0$ را با روش هندسی حل کنید.

ابتدا آن را به صورت $x^2 = x + 2$ می‌نویسیم و نمودارهای معادله‌های $y_1 = x^2$ و $y_2 = x + 2$ را رسم می‌کنیم. این دو نمودار در نقاط A و B با یکدیگر برخورد می‌کنند. به ازای طول نقطه A و طول نقطه B ، مقدارهای x^2 و $x + 2$ مساوی شده‌اند. این مقدارها، دو جواب معادله $x^2 - x - 2 = 0$ می‌باشند. یعنی $x = 2$ و $x = -1$.

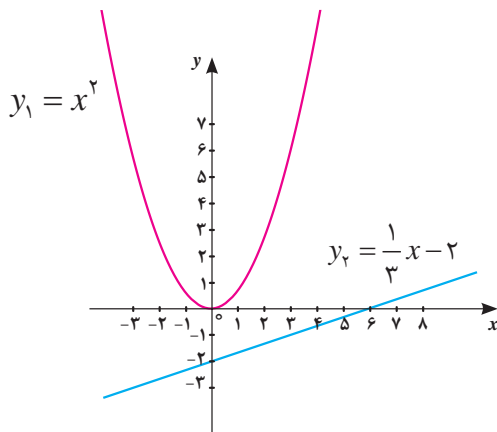
x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
x^2	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹
$x+2$	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵



مثال ۴

معادله درجه دوم $3x^2 - x + 6 = 0$ را با روش هندسی حل کنید.

ابتدا آن را به صورت $x^2 = \frac{1}{3}x - 2$ می نویسیم و نمودارهای معادله های $y_1 = x^2$ و $y_2 = \frac{1}{3}x - 2$ را رسم می کنیم. دیده می شود که این نمودارها با یکدیگر برخورد نمی کنند. پس، نقطه مشترکی ندارند و به ازای هیچ مقداری از x دو مقدار x^2 و $\frac{1}{3}x - 2$ مساوی نمی شوند. پس معادله $x^2 = \frac{1}{3}x - 2$ جواب ندارد.

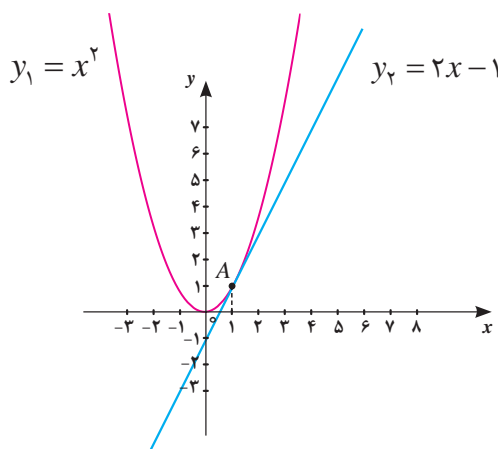


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{3}x - 2$	-3	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{7}{3}$	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1

مثال ۵

معادله درجه دوم $x^2 - 2x + 1 = 0$ را با روش هندسی حل کنید.

ابتدا آن را به صورت $x^2 = 2x - 1$ می نویسیم و نمودارهای معادله های $y_1 = x^2$ و $y_2 = 2x - 1$ را رسم می کنیم. دیده می شود که این نمودارها بر هم مماس هستند. با توجه به امکان وجود خطای دید، حدس می زنیم معادله فقط یک جواب دارد و برای بررسی درستی حدس خود، از جدول کمک می گیریم. در این حالت $x = 1$ جواب معادله است.



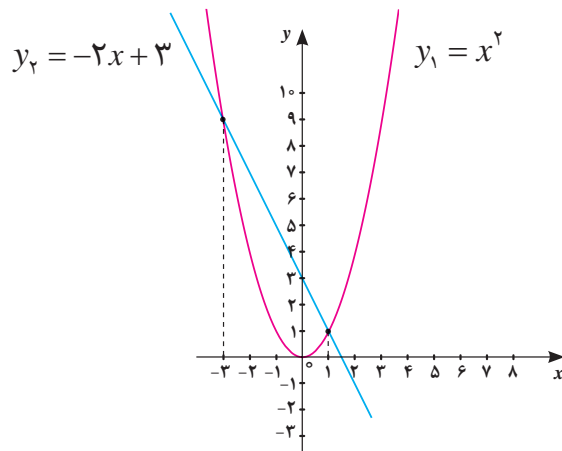
x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$2x - 1$	-5	-3	-1	1	3

همان طور که در مثال‌ها دیدید، برخی از معادله‌های درجه دوم، دارای یک جواب (یک نقطه مشترک بین خط و منحنی)، برخی دیگر دارای ۲ جواب (دو نقطه مشترک بین خط و منحنی) و برخی هم بدون جواب (بدون نقطه مشترک بین خط و منحنی) هستند.

مثال ۶

با روش هندسی نشان دهید عدد ۳-: یک جواب معادله $x^2 + 2x - 3 = 0$ است. سپس جواب دیگر معادله را پیدا کنید.

نمودارهای منحنی $y_1 = x^2$ و خط $y_2 = -2x + 3$ را رسم می‌کنیم.



این دو نمودار در نقطه‌ای به طول ۳- همدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین ۳- یک جواب معادله است. با دقت در نمودار مشاهده می‌شود که این دو نمودار یکدیگر را در نقطه‌ای به طول ۱ نیز قطع کرده‌اند. بنابراین، $x = 1$ جواب دیگر معادله است.

کاردرکلاس ۵



معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید (برای سهولت در رسم، از نرم‌افزار جئوجبرا کمک بگیرید).

الف) $x^2 + 2x + 1 = 0$

ب) $x^2 - 1 = 0$

پ) $2x^2 + x + 1 = 0$



۱) معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید و جواب‌های آنها را به طور تقریبی به دست آورید.

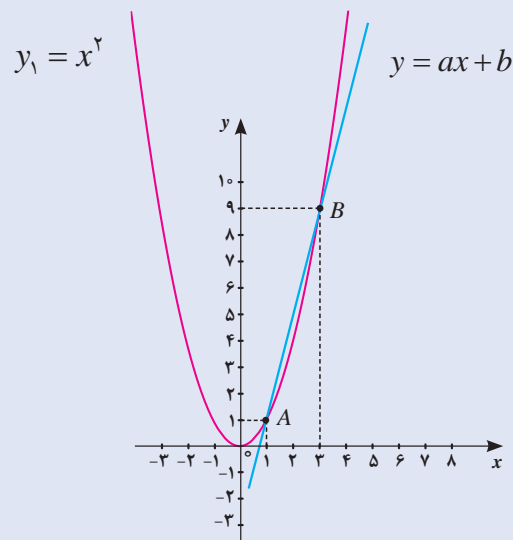
الف) $2x^2 - 3x = 5$

ب) $4x^2 + 8x = 0$

پ) $x^2 + x = 1$

ت) $x^2 + 4x = -4$

۲) در شکل زیر، خط به معادله $y = ax + b$ را در نظر بگیرید. مقادیر a و b را با توجه به شکل مشخص کنید. سپس معادله درجه دومی بنویسید که جواب‌های آن ۱ و ۳ باشد (راهنمایی: یک دستگاه دو معادله با دو مجهول بر حسب a و b تشکیل دهید، یا ابتدا شیب این خط را بیابید).



روش جبری حل معادله‌های درجهٔ دوم

با توجه به وجود خطای رسم و اندازه‌گیری در روش هندسی، همواره نمی‌توان به جواب دقیق رسید. با انجام فعالیت ۵ با روش دیگری آشنا می‌شوید که با استفاده از آن، جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم به‌طور دقیق محاسبه می‌شود.

فعالیت ۵



معادلهٔ $x^2 + 6x - 7 = 0$ را در نظر بگیرید.

(۱) جمله‌هایی را که مجهول دارند، در یک طرف تساوی نگه دارید و جملهٔ ثابت را به طرف دیگر ببرید.

(۲) نصف ضریب x در معادلهٔ بالا را به دست آورید و آن را به توان ۲ برسانید.

(۳) عدد به دست آمده از مرحلهٔ (۲) را به دو طرف معادلهٔ مرحلهٔ (۱) اضافه کنید.

(۴) طرف اول تساوی را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، به صورت مجذور یک عبارت بنویسید.

(یادآوری: اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ است.)

(۵) از دو طرف تساوی جذر بگیرید و دو جواب برای x به دست آورید.

روشی را که در بالا برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم به کار بردیم، برای هر معادلهٔ درجهٔ دوم دیگری هم می‌توان به کار برد.



معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را مانند فعالیت ۵ حل کنید.

از روش فعالیت ۵ برای حل یک معادله درجه دوم دلخواه استفاده می‌کنیم تا تشخیص دهیم در چه شرایطی یک معادله درجه دوم جواب دارد. در صورت وجود جواب، فرمولی هم برای جواب‌های معادله درجه دوم پیدا می‌کنیم.



معادله درجه دوم دلخواه $ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر بگیرید ($a \neq 0$).

(۱) طرفین معادله بالا را بر a تقسیم کنید و معادله درجه دومی بنویسید که ضریب x^2 در آن برابر ۱ باشد.

(۲) جمله‌های دارای x را در یک طرف تساوی نگه دارید و جمله ثابت (جمله فاقد x) را به طرف دیگر ببرید.

(۳) در معادله بالا، نصف ضریب x را به دست آورید و آن را به توان ۲ برسانید.

(۴) عدد به دست آمده از مرحله (۳) را به دو طرف معادله مرحله (۲) اضافه کنید.

(۵) به کمک تساوی‌های بالا، جاهای خالی را پر کنید:

$$\left(x + \frac{b}{\dots}\right)^2 = \frac{\dots - 4ac}{\dots}$$

(۶) تساوی بالا در چه شرایطی امکان‌پذیر است؟ معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در چه شرایطی جواب دارد؟

(۷) نشان دهید در صورت مثبت بودن $b^2 - 4ac$ جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر جواب‌های دو معادله زیر است.

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

با انجام فعالیت صفحه قبل نتیجه می‌گیریم که در صورت مثبت بودن $b^2 - 4ac$ ، که معادله درجه دوم دارای جواب‌های زیر است:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

فرمول‌های بالا را **فرمول‌های محاسبه جواب معادله درجه دوم** می‌گویند. در هر معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ، عبارت $b^2 - 4ac$ را با Δ (بخوانید دلتا) نشان می‌دهند. شرط وجود جواب برای یک معادله درجه دوم این است که $\Delta \geq 0$.

اگر $\Delta > 0$ ، معادله دو جواب دارد که عبارت‌اند از: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

اگر $\Delta = 0$ ، معادله فقط دارای جواب $x = -\frac{b}{2a}$ است؛ زیرا از فرمول‌های محاسبه جواب معادله، نتیجه می‌شود: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

اگر $\Delta < 0$ ، معادله جواب ندارد. چرا؟

مثال ۷

جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ را در صورت وجود پیدا کنید.

در این معادله $a = 1$ و $b = -3$ و $c = 1$. بنابراین $\Delta = (-3)^2 - (4)(1)(1) = 5$.

چون $\Delta = 5 > 0$ ، این معادله دارای دو جواب زیر است:

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

پ) $x^2 - 3x = 0$

ب) $x^2 - 6 = 0$

الف) $5x^2 + 2x + 1 = 0$

کارد در کلاس ۷





(۱) جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $2x^2 + 5x = 0$

ب) $3x^2 + 13x + 3 = 0$

پ) $\sqrt{2}x(x + \sqrt{5}) = \sqrt{8}$

ت) $x^2 + x + 2 = 0$

ث) $(2x - 1)^2 = 5$

ج) $(x + 2)^2 = -4$

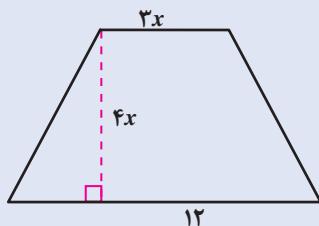
(۲) اگر یکی از جواب‌های معادله $5x^2 + 13x + c = 0$ برابر (-3) باشد، جواب دیگر این معادله را بیابید.

.....

(۳) اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد و مساحت آن 300 مترمربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟

.....

(۴) مساحت ذوزنقه متساوی‌الساقین زیر، 108 سانتی‌متر مربع است. مقدار x را پیدا کنید.



.....

.....

(۵) حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی، 132 می‌باشد. این دو عدد را پیدا کنید.

.....

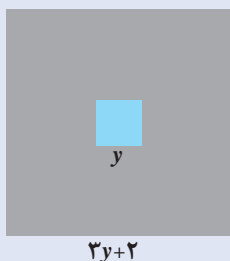
۶) عددی طبیعی بیابید که دو برابر آن به اضافه ۳۵، با توان دوم آن عدد مساوی باشد.

.....

۷) نشان دهید $-1 + \sqrt{2}$ یک جواب معادله $x^2 + 2x - 1 = 0$ است.

.....

۸) مساحت ناحیه خاکستری ۴۰ سانتی متر مربع است. اندازه هر ضلع مربعها را به دست آورید.



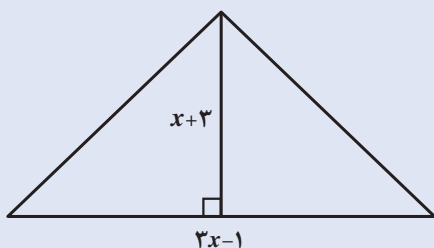
.....

.....

۹) معمای زیر در کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی آمده است (گرفته شده از کتاب خوارزمی بنیان گذار جبر، کارونا برزینا).

”مقداری است که اگر یک سوم آن و یک درهم را در یک چهارم آن و یک درهم ضرب کنم، حاصل آن بیست می شود.“

این مقدار را پیدا کنید.



۱۰) مساحت مثلث روبه رو ۲۴ سانتی متر مربع است.

الف) مقدار x را پیدا کنید.

ب) اندازه قاعده و ارتفاع مثلث چقدر است؟

.....



پودمان چهارم

توان رسانی به توان عددهای گویا



پژوهشگران به تازگی با استفاده از دست کاری ژنتیکی نوعی باکتری، توانسته‌اند روندی برای این باکتری ایجاد کنند که با دریافت هیدروژن و کربن دی اکسید، انرژی تولید کند. این باکتری می‌تواند هیدروژن و کربن دی اکسید را جذب کرده و آنها را به سوخت الکل تبدیل کند. هدف از این کار، رسیدن به یک سطح قابل توجه از بهره‌وری است که بتواند در این زمینه از گیاهان پیشی بگیرد. محققان اعلام کردند که باکتری‌ها می‌توانند از نور خورشید تا میزان ۱۰ برابر مؤثرتر از گیاهان بهره‌وری کنند.

۴ - ۱ - مفهوم توان‌رسانی به توان‌دهای گویا

محمد مدتی بیمار بود و برای معالجه به دکتر مراجعه کرده بود. دکتر از او در مورد زمان شروع بیماری و شدت آن پرسیده بود. او پس از بهبودی، به مدرسه رفت و از دبیر علوم خود سؤال کرد: «مگر زمان شروع بیماری در تصمیم دکتر برای تجویز دارو مؤثر است؟»

دبیر گفت: «بله. علت بروز بسیاری از بیماری‌ها باکتری‌ها هستند و با گذشت زمان مقدار آنها افزایش می‌یابد؛ مثلاً، نوعی از باکتری‌ها پس از هر ساعت دو برابر می‌شوند. بنابراین، اگر در شروع، یک گرم باکتری داشته باشیم، در پایان ساعت‌های اول و دوم و سوم و ... وزن باکتری‌ها به ترتیب ۲ و ۴ و ۸ و ... گرم خواهد شد.» محمد همان طور که با خود فکر می‌کرد ریاضی در پزشکی هم کاربرد دارد، این سؤال برایش مطرح شد: وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر خواهد شد؟

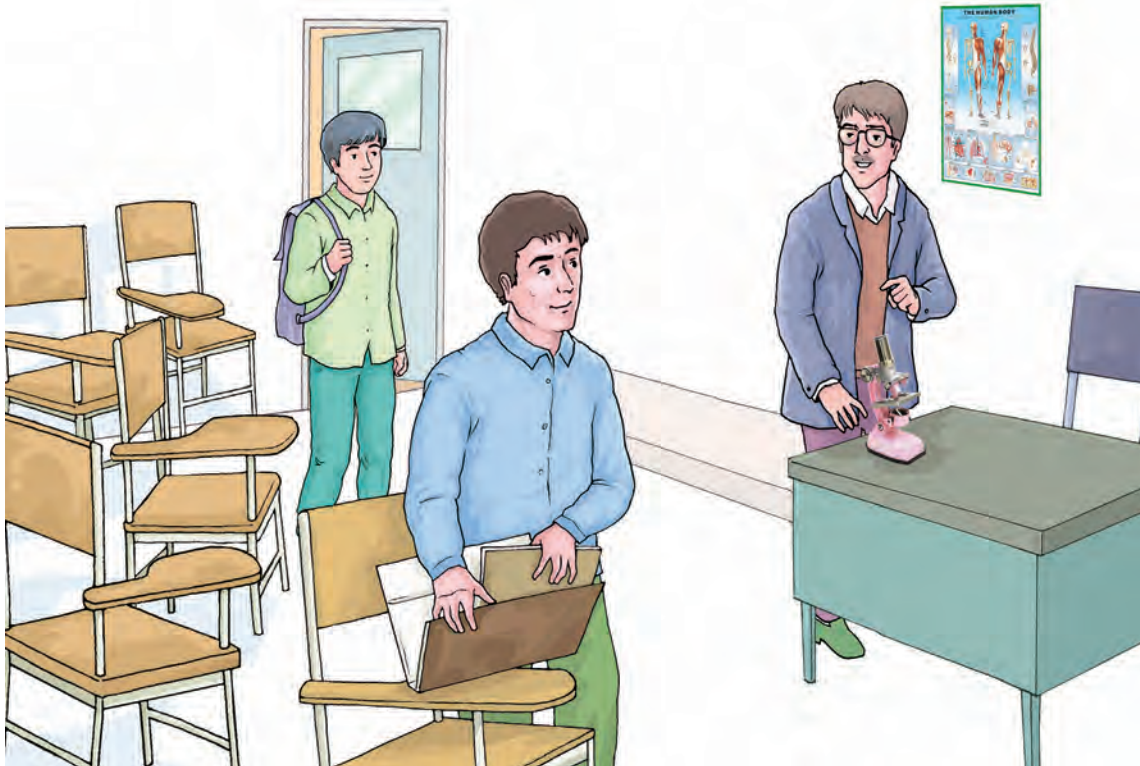
دبیر گفت: «اگر به ارتباط بین وزن باکتری‌ها و زمان سپری شده توجه کنید می‌توانید وزن آنها را حدس بزنید. وزن یک گرم باکتری پس از ۱ ساعت ۲^۱ گرم، بعد از ۲ ساعت ۲^۲ گرم و بعد از ۳ ساعت ۲^۳ گرم و ... می‌شود. آیا می‌توانید حدس بزنید که بعد از نیم ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت) وزن باکتری‌ها چقدر می‌شود؟»

محمد گفت: «شاید می‌خواهید بگویید ۲ ^{$\frac{1}{2}$} گرم است.»

دبیر گفت: «فرض کنیم حدسی که زده‌اید درست باشد، آیا این عدد برایتان معنی دارد؟»

محمد گفت: «با عددهایی که توان آنها عدد صحیح است آشنایی دارم؛ اما نمی‌دانم ۲ ^{$\frac{1}{2}$} چیست.»

دبیر گفت: «با انجام فعالیت بعد، شما خودتان هم می‌توانید مقدار این عدد را پیدا کنید.»





نوعی باکتری را در نظر بگیرید که وزن آن هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر در شروع ۱ گرم باکتری داشته باشیم، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

(۱) اگر وزن باکتری‌ها پس از هر نیم‌ساعت b برابر شود، وزن آنها را پس از یک‌ساعت بر حسب b به‌دست آورید و در محل تعیین شده بنویسید.

(۲) وزن ۱ گرم باکتری را پس از یک ساعت بر حسب گرم محاسبه کنید و در محل تعیین شده بنویسید. از تساوی حاصل، مقدار b را به‌دست آورید.

محمد گفت: آیا می‌توانیم از این فعالیت نتیجه بگیریم که مقدار $\sqrt[1]{2}$ همان $\sqrt{2}$ است؟
 دبیر گفت: بله می‌توانیم. تعریف $\sqrt[1]{2}$ به صورت $\sqrt{2}$ تعریف مناسبی است. حال فرض کنیم وزن باکتری‌ها پس از یک ساعت ۳ برابر می‌شود. اگر با یک گرم باکتری شروع کنیم، وزنی را که آنها پس از **نیم‌ساعت** به آن می‌رسند، با نماد $\sqrt[1]{3}$ نشان می‌دهیم. این عدد همان $\sqrt{3}$ است؛ زیرا اگر این عدد را با b نشان دهیم پس از پایان یک‌ساعت مقدار باکتری‌ها از یک طرف ۳ و از طرف دیگر b^2 است. پس $b^2 = 3$ ؛ که نتیجه می‌دهد $b = \sqrt{3}$ ؛ یعنی:

$$\sqrt[1]{3^2} = \sqrt{3}$$

در حالت کلی، توان $\frac{1}{p}$ همهٔ اعداد مثبت به همین صورت تعریف می‌شود.

تعریف

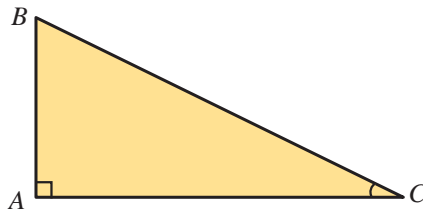


اگر a عددی مثبت یا صفر باشد، بنا به تعریف $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

مثال ۱

الف) نمایش رادیکالی عدد $36^{\frac{1}{2}}$ به صورت $\sqrt{36}$ است و $36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$.

ب) شکل زیر، یک مثلث قائم‌الزاویه است ($\hat{A} = 90^\circ$). اگر اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ قائمه ۵ و ۱۲ باشد، طول وتر را به صورت یک عدد توان‌دار و یک عدد رادیکالی نمایش دهید و آن را ساده کنید.



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow BC = 169^{\frac{1}{2}} = \sqrt{169} = 13$$

کاردکلاس ۱



۱) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$$49^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$(0.01)^{\frac{1}{2}} =$$

۲) طول ضلع مربعی را که مساحت آن ۹ سانتی‌متر مربع است، به صورت یک عدد توان‌دار نمایش دهید و آن را ساده کنید.

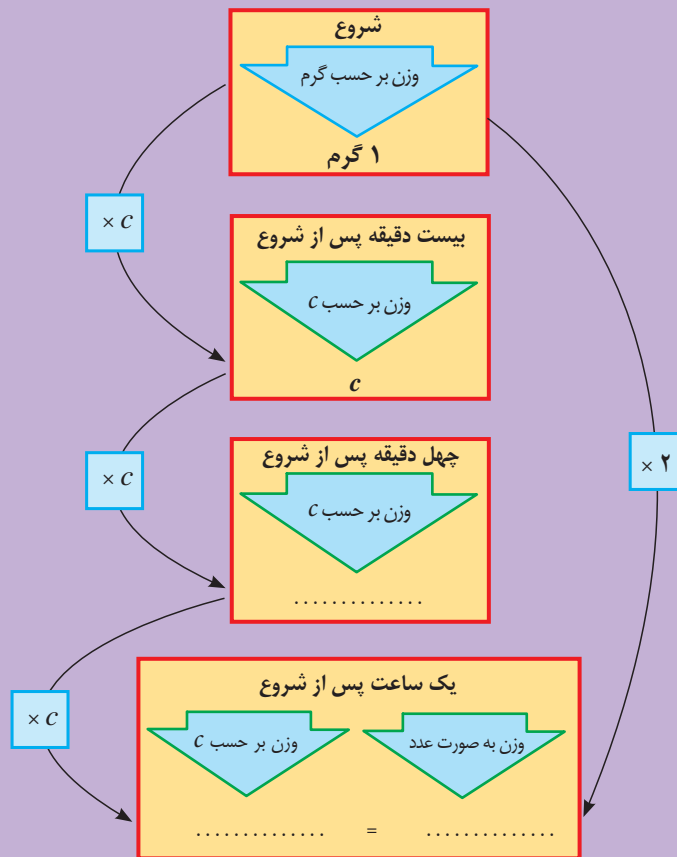
در فعالیت ۲، مفهوم توان $\frac{1}{3}$ عددهای مثبت را بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۲



یک گرم از یک نوع باکتری را در نظر بگیرید که پس از هر ساعت دو برابر می‌شود. با روش زیر بررسی کنید که پس از $\frac{1}{3}$ ساعت چند گرم باکتری ایجاد می‌شود.

- (۱) فرض کنید وزن باکتری‌ها پس از هر $\frac{1}{3}$ ساعت C برابر شود. وزن باکتری‌ها را پس از $\frac{1}{3}$ ساعت و $\frac{2}{3}$ ساعت و یک ساعت بر حسب C در نمودار زیر بنویسید.
- (۲) نمودار را کامل کنید و از تساوی حاصل، مقدار C را به دست آورید.



در اینجا نیز، وزن باکتری‌ها را پس از $\frac{1}{3}$ ساعت با $2^{\frac{1}{3}}$ نمایش می‌دهیم. فعالیت بالا نشان می‌دهد که وزن این نوع باکتری پس از $\frac{1}{3}$ ساعت، $\sqrt[3]{2}$ است. بنابراین، $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

اگر وزن باکتری‌ها پس از هر ساعت ۵ برابر شود و با یک گرم باکتری شروع کنیم، وزن آنها را پس از بیست دقیقه ($\frac{1}{3}$ ساعت) با $5^{\frac{1}{3}}$ نشان می‌دهیم. این مقدار با استدلالی شبیه به فعالیت صفحه قبل برابر $\sqrt[3]{5}$ می‌باشد. در حالت کلی، توان $\frac{1}{3}$ هر عدد مثبت a به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف



اگر a عددی مثبت یا صفر باشد، بنا به تعریف $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$.

مثال ۲

الف) نمایش رادیکالی عدد $8^{\frac{1}{3}}$ به صورت $\sqrt[3]{8}$ است، بنابراین: $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

ب) طول ضلع مکعبی با حجم ۲۷ سانتی‌متر مکعب، $\sqrt[3]{27}$ سانتی‌متر است که می‌توانیم به صورت $27^{\frac{1}{3}}$ نمایش دهیم.

کاردرکلاس ۲



۱) با توجه به تساوی‌های داده شده، ابتدا نمایش رادیکالی اعداد را بنویسید و سپس، حاصل را به دست آورید.

$$\text{الف) } 6^3 = 216 \Rightarrow 216^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dots} = \dots$$

$$\text{ب) } \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343} \Rightarrow \left(\frac{1}{343}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{\dots}{\dots}} = \dots$$

۲) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$$(0/001)^{\frac{1}{3}} = \quad \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \quad (9^3)^{\frac{1}{3}} = \quad 64^{\frac{1}{3}} =$$

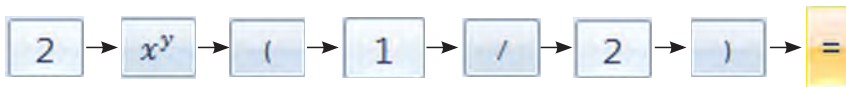
استفاده از ماشین حساب

یک گرم از باکتری‌هایی را که وزن آنها پس از یک ساعت دو برابر می‌شوند در نظر بگیرید. با استفاده از ماشین حساب، وزن آنها را در هر یک از دو حالت زیر بر حسب گرم با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار نشان دهید (توجه کنید، اگر از ماشین حساب‌های مختلف استفاده می‌کنید، ممکن است ترتیب فشار دادن کلیدها متفاوت باشد).

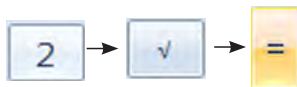


الف) پس از نیم‌ساعت:

محاسبه از طریق توان‌رسانی^۱:

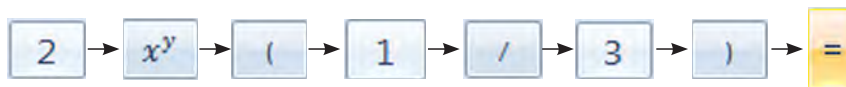


محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

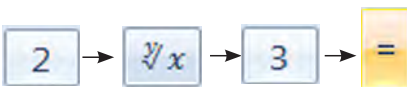


ب) پس از ۲۰ دقیقه:

محاسبه از طریق توان‌رسانی:



محاسبه از طریق ریشه‌گیری:



^۱ در کادرهای استفاده از ماشین حساب، فلش بین دکمه‌های ماشین حساب به معنای توالی فشردن دکمه‌های ماشین حساب است.



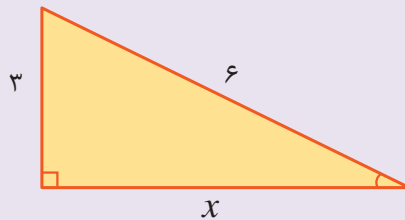
(۱) نقطه چین‌ها را با عبارت مناسب تکمیل کنید:

$$11^3 = 1331 \Rightarrow 1331^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dots} = \dots$$

$$17^2 = 289 \Rightarrow 289^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dots} = \dots$$

(۲) مقادیر خواسته شده را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار با توان گویا بنویسید و سپس عبارت رادیکالی متناظر آن را نوشته و با استفاده از ماشین حساب، حاصل را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

الف) مقدار x



ب) نوعی از باکتری را در نظر می‌گیریم که وزن آن پس از یک ساعت دو برابر می‌شود. اگر با دو گرم باکتری شروع کنیم پس از نیم ساعت چقدر باکتری داریم؟ مقدار باکتری‌ها پس از بیست دقیقه چقدر است؟

.....

پ) قطر یک مربع به ضلع ۳ را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

.....

(۳) بخشی از راه حل احمد برای یافتن ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 2 = 0$ به صورت زیر است:

$$x = \frac{3 \pm \left((-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) \right)^{\frac{1}{2}}}{2 \times 2} = \dots$$

درستی یا نادرستی راه حل را بررسی کرده و در صورت درستی با ادامه راه حل و در صورت نادرستی با نوشتن راه حل درست، ریشه‌های معادله را به دست آورید.

۴) دارایی‌های یک شرکت در هر سال، ۱۵۰ درصد سال قبل است. دارایی این شرکت طی ده سال به صورت زیر گزارش شده است:

زمان تأسیس: ۱ میلیارد ریال، پایان سال اول: ۱/۵ میلیارد ریال، پایان سال دوم: ۲/۲۵ میلیارد ریال و ...

الف) دارایی شرکت در پایان سال‌های دوم، چهارم و دهم را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.
ب) رابطه‌ای بنویسید که دارایی در پایان سال n ام را به صورت یک عبارت توان دار بر حسب n نمایش دهد.
پ) اگر روند رشد دارایی‌ها در هر ماه نیز طبق رابطه قسمت قبل باشد، دارایی شرکت را پس از ۴ ماه و ۶ ماه، به صورت یک عدد توان دار و یک عبارت رادیکالی نمایش دهید و با ماشین حساب مقدار آن را به صورت یک عدد اعشاری نمایش دهید.



به تازگی دانشمندان موفق شده‌اند فناوری جدیدی ارائه کنند که به کمک آن می‌توان اطلاعات را بر روی رشته‌های دی‌ان‌ای باکتری‌ها ذخیره کرد. این روش از این نظر بسیار حائز اهمیت است که برخلاف روش‌های پیشین بدون آسیب رساندن به بافت زنده باکتری، می‌توان این کار را به انجام رساند.

طراحان این روش معتقدند که ذخیره داده‌ها بر روی بافت‌های زنده می‌تواند مزایای خارق‌العاده‌ای را به همراه داشته باشد زیرا با چنین ساختارهایی می‌توانند به درمان هوشمند بیماری‌ها دست بزنند. البته حجم داده‌های قابل ذخیره در شرایط فعلی به هیچ عنوان به اندازه‌ای نیست که بتوان از آن در سطح کاربردی بهره گرفت ولی این روش را می‌توان یک راهکار برای آینده انباره‌های اطلاعاتی به حساب آورد.

خواندنی



۴-۲- ریشه‌گیری عددهای حقیقی

مسئله تعیین وزن باکتری‌ها را در نظر بگیرید. وزن باکتری‌ها پس از ۱۵ دقیقه ($\frac{1}{4}$ ساعت) چقدر است؟ پس از ۱۲ دقیقه ($\frac{1}{5}$ ساعت) چقدر است؟ این مقادیر را چگونه نشان می‌دهند؟ برای پاسخ دادن به این سؤال‌ها لازم است علاوه بر ریشه دوم و سوم، ریشه‌های دیگر یک عدد را هم بشناسیم.

تاریخچه ریشه‌گیری

خواندنی



از لحاظ تاریخی، ایده ریشه‌گیری در ارتباط با حل معادله‌های جبری پدید آمده است. در محاسبه جواب‌های معادله‌های درجه دوم و سوم، عبارات پیچیده‌ای از رادیکال‌ها دیده می‌شوند. اگرچه روش‌های عددی در محاسبه جواب‌های معادله‌ها بسیار مؤثرتر هستند، با این حال نیاز به ریشه‌گیری همچنان وجود دارد.



جرونیو کاردان

ریشه‌گیری عکس عمل توان‌رسانی است. توان‌رسانی به توان n (برای عدد a) را با a^n نشان می‌دهند و عکس این عمل را با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهند و آن را ریشه n ام از a می‌نامند.

پس از کشف فرمول جبری حل معادله‌های درجه دوم، تحقیقاتی طولانی برای یافتن فرمول جبری برای حل معادله‌های درجه سوم آغاز شد. برای یافتن چنین فرمولی باید تا قرن شانزدهم صبر می‌شد تا کاردان، ریاضیدان ایتالیایی چنین فرمولی را به دست آورد. جواب‌های معادله $x^3 + ax = b$ به شکل زیر هستند.

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}}$$

بعد از حل معادله‌های درجه سوم، چگونگی حل معادله‌های درجه چهارم نیز به دست آمد. اوایل تلاش کرد معادله‌های درجه پنجم را به روش مشابهی حل کند ولی موفق نشد. در قرن نوزدهم آبل و گالوا ثابت کردند که معادله‌های درجه پنجم به روش‌های جبری قابل حل نیستند و فرمولی جبری از طریق ریشه‌گیری برای جواب‌های معادله‌های درجه پنجم و درجات بالاتر وجود ندارد.



در هر قسمت، ابتدا جمله‌ها را کامل کنید. سپس به سؤال پاسخ دهید.

(۱) یک ریشه دوم عدد ۲۵ عدد ... است؛ زیرا $۲۵ = (\dots)^2$

.....

(۲) ریشه‌های دوم یک عدد را تعریف کنید.

.....

(۳) یک ریشه سوم عدد ۸ عدد ... است؛ زیرا $۸ = (\dots)^3$.

.....

(۴) ریشه‌های سوم یک عدد را تعریف کنید.

.....

(۵) برای ریشه‌های چهارم یک عدد، چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشه چهارم مثالی بزنید.

.....

(۶) برای ریشه‌های پنجم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشه پنجم مثالی بزنید.

.....

(۷) برای ریشه‌های k ام یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟

.....

(۸) اگر $b^k = a$ آنگاه یک ریشه عدد است.

با استفاده از فعالیت ۳، تعریف زیر از ریشه‌گیری مرتبه‌های بالاتر داده می‌شود.

تعریف



اگر k یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد، عدد حقیقی b را یک ریشه k ام عدد حقیقی a می‌نامیم، هرگاه $b^k = a$.

مثال ۳

الف) عدد ۲ یک ریشه ششم ۶۴ است؛ زیرا $۲^۶ = ۶۴$.

ب) با توجه به $\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10,000}$ ، عدد $\frac{1}{10}$ یک ریشه چهارم $\frac{1}{10,000}$ است.

پ) عدد ۲- یک ریشه پنجم ۳۲- است؛ زیرا $(-۲)^۵ = -۳۲$.

ت) برای هر عدد طبیعی k ، صفر فقط یک ریشه k ام دارد که برابر با صفر است.

ث) با تجزیه عدد ۱۵,۶۲۵ به عوامل اول، نتیجه می‌شود $۱۵,۶۲۵ = ۵^۵$ یعنی ۵ یک ریشه ششم ۱۵,۶۲۵ است.

کاردکلاس ۳



۱) به جای نقطه‌چین‌ها، عددهای مناسب قرار دهید.

الف) از آنجا که $۳^۵ = ۲۴۳$ ، عدد یک ریشه پنجم عدد است.

ب) با توجه به تساوی، $(-۵)^۶ = \dots$ عدد یک ریشه ششم عدد است.

پ) تساوی $\left(\frac{1}{۲}\right)^۸ = \frac{1}{۸}$ نشان می‌دهد که عدد $\frac{1}{۲}$ یک ریشه عدد است.

۲) یک ریشه چهارم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۶۲۵ (ب) $\frac{1}{۸۱}$ (ج) ۰/۰۰۰۱

۳) یک ریشه پنجم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۱ (ب) $-\frac{1}{۳۲}$ (ج) ۳×۸۱

۴) برای پیدا کردن ریشه‌های چهارم و پنجم یک عدد، چه پیشنهادی دارید؟



(۱) جدول زیر را کامل کنید.

عدد	-۲	-۱	$-\frac{۲}{۳}$	۰	$\frac{۲}{۳}$	۱	۲
توان چهارم	$\frac{۱۶}{۸۱}$

(۲) آیا در سطر دوم جدول، عدد منفی دیده می‌شود؟ چرا؟

.....

(۳) توان چهارم اعداد قرینه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

.....

(۴) آیا یک عدد منفی می‌تواند ریشهٔ چهارم داشته باشد؟ چرا؟

.....

(۵) با استفاده از جدول، ریشه‌های چهارم اعداد ۱ و $\frac{۱۶}{۸۱}$ را بنویسید.

.....

(۶) با توجه به پاسخ‌های به دست آمده، در مورد تعداد ریشه‌های چهارم عدد مثبت a چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این ریشه‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟

.....

(۷) آیا این نتیجه در مورد ریشه‌های زوج دیگر نیز درست است؟ با مثال نشان دهید.

.....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که عددهای مثبت دو ریشهٔ زوج دارند و این ریشه‌ها قرینهٔ یکدیگرند. با دقت در جدول بالا مشاهده می‌شود که توان زوج همهٔ اعداد منفی، همواره عددی مثبت است. بنابراین اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند.



(۱) هر عدد مثبت a دو ریشه زوج دارد که قرینه یکدیگرند، اگر k یک عدد طبیعی زوج باشد، ریشه k ام مثبت a را با $\sqrt[k]{a}$ نمایش می‌دهیم، و ریشه k ام منفی آن $-\sqrt[k]{a}$ خواهد بود.

(۲) اعداد منفی ریشه زوج ندارند.

مثال ۴

(الف) عدد 64 دارای دو ریشه ششم است که عبارت‌اند از 2 و -2 ؛ زیرا $2^6 = 64 = (-2)^6$ ، بنابراین $\sqrt[6]{64} = 2$.

(ب) عدد 64 ریشه ششم ندارد؛ زیرا توان ششم هر عدد حقیقی، مثبت است.

(پ) عدد 2 ، دو ریشه چهارم دارد که قرینه یکدیگرند. این دو ریشه به صورت $\sqrt[4]{2}$ و $-\sqrt[4]{2}$ نوشته می‌شوند.

(ت) عدد -2 ریشه چهارم ندارد؛ زیرا هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که توان چهارم آن منفی باشد.

می‌دانیم که رابطه $\sqrt{a^2} = |a|$ برای هر عدد حقیقی a درست است. در فعالیت زیر درستی این رابطه را برای ریشه‌های زوج دیگر نیز بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۵



(۱) جدول زیر را کامل کنید.

a	$-0/1$	$0/1$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	2
$\sqrt[4]{a^2}$	$\sqrt[4]{(-0/1)^2}$
حاصل	$0/1$

(۲) عددهای سطر آخر جدول چه رابطه‌ای با عددهای سطر اول آن دارند؟

.....

(۳) حاصل $\sqrt[6]{3^6}$ و $\sqrt[6]{(-3)^6}$ را به دست آورید و با نتیجه قسمت قبل مقایسه کنید.

.....

نتیجه فعالیت ۵ در مورد هر ریشه زوج نیز برقرار است.

اگر a عددی حقیقی و k عددی زوج باشد، آنگاه $\sqrt[k]{a^k} = |a|$

تعریف



مثال ۵

عبارت‌های $\sqrt[6]{(-\frac{2}{3})^6}$ و $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4}$ را ساده کنید.

$$\sqrt[6]{(-\frac{2}{3})^6} = \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$$

کاردکلاس ۴



(۱) حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt[4]{625}$ ب) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$ پ) $\sqrt[6]{0.000001}$ ت) $\sqrt[6]{(-0.01)^6}$

(۲) ریشه‌های ششم اعداد زیر را بنویسید.

الف) 5^6 ب) 729 پ) 1 ت) $(-5)^6$

(۳) عبارت‌های $\sqrt[6]{(-\frac{5}{3})^6}$ و $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4}$ را بدون استفاده از رادیکال بنویسید.

در فعالیت ۵ دیدید که اعداد منفی ریشه زوج ندارند و اعداد مثبت دو ریشه زوج قرینه دارند. در ادامه، این وضع را برای ریشه‌های فرد بررسی می‌کنیم.



(۱) جدول زیر را کامل کنید.

ریشه ...	۲	۱	$\frac{1}{4}$	۰	-۱	$-\frac{1}{4}$	-۲	عدد
عدد	$\frac{1}{1024}$	توان پنجم

(۲) آیا در سطر دوم جدول، عددی منفی دیده می‌شود؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت که عددهای منفی ریشه پنجم دارند؟

.....

(۳) توان پنجم عددهای قرینه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

.....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که همه عددها ریشه پنجم دارند. این نتیجه در مورد ریشه‌های فرد دیگر نیز درست است. هر عدد حقیقی، یک و فقط یک ریشه فرد k ام دارد.



اگر k عددی فرد باشد، عدد حقیقی a ، یک و فقط یک ریشه فرد k ام دارد که آن را با $\sqrt[k]{a}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۶

عدد 243 یک ریشه پنجم دارد که عدد 3 است؛ زیرا $3^5 = 243$. بنابراین: $\sqrt[5]{243} = 3$. همچنین عدد -243 یک ریشه پنجم دارد که عدد -3 است؛ زیرا $(-3)^5 = -243$ پس: $\sqrt[5]{-243} = -3$.



حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

ت) $\sqrt[7]{(-3)^7}$

پ) $\sqrt[5]{-0/000001}$

ب) $\sqrt[5]{\frac{1}{325}}$

الف) $\sqrt[5]{11^5}$

اکنون که علاوه بر ریشهٔ دوم و سوم با ریشه‌های دیگر عددها نیز آشنا شده‌ایم، می‌توانیم توان‌های گویای دیگر اعداد مثبت را نیز تعریف کنیم.

اگر a یک عدد حقیقی مثبت یا صفر و n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه بنا به تعریف

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

نکته



توجه داشته باشید که در تعریف توان‌رسانی به توان عددهای گویای غیر صحیح، پایه همواره مثبت در نظر گرفته می‌شود و توان گویای اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

مثال ۷

الف) نمایش رادیکالی عدد $32^{\frac{1}{5}}$ عبارت است از $\sqrt[5]{32}$. بنابراین: $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$.

ب) ریشه یکم هر عدد برابر با خودش است.

پ) عدد $625^{\frac{1}{4}}$ برابر است با $\sqrt[4]{625}$ که ساده شدهٔ آن عدد ۵ است؛ یعنی: $625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = 5$.

ت) نوعی از باکتری را در نظر بگیرید که وزن آن پس از هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر در شروع، یک گرم باکتری داشته باشیم، وزن آن پس از ۱۲ دقیقه ($\frac{1}{5}$ ساعت) برابر است با $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$ گرم و پس از ۱۵ دقیقه ($\frac{1}{4}$ ساعت) برابر است با $2^{\frac{1}{4}}$.



ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را نوشته و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

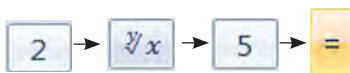
الف) $(3^8)^{\frac{1}{8}}$ ب) $(\frac{1}{32})^{\frac{1}{5}}$ پ) $(0.00001)^{\frac{1}{5}}$ ت) $243^{\frac{1}{5}}$

استفاده از ماشین حساب

به کمک ماشین حساب ابتدا عدد $\sqrt[5]{2}$ و سپس عدد $2^{\frac{1}{5}}$ را با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار بنویسید و درستی تساوی آنها را بررسی کنید.



به کمک ریشه گیری :



به کمک توان رسانی :



توان رسانی به توان سایر اعداد گویا نیز قابل تعریف است. می‌دانیم که در توان رسانی به توان اعداد صحیح خاصیت $(a^m)^n = a^{mn}$ برقرار است. تعریف را به گونه‌ای ارائه می‌کنیم که این ویژگی برای توان رسانی به توان اعداد گویا هم برقرار باشد. برای مثال، برای محاسبه $a^{\frac{2}{n}}$ ، آن را به صورت $a^{\frac{1}{n} \times 2}$ در نظر می‌گیریم. ابتدا $a^{\frac{1}{n}}$ را حساب می‌کنیم و حاصل را به توان ۲ می‌رسانیم. برای محاسبه $a^{\frac{3}{n}}$ ، آن را به صورت $a^{\frac{1}{n} \times 3}$ در نظر می‌گیریم و ابتدا $a^{\frac{1}{n}}$ را حساب می‌کنیم و حاصل را به توان ۳ می‌رسانیم. به همین ترتیب و برای محاسبه $a^{\frac{-3}{n}}$ ، آن را به صورت $a^{\frac{1}{n} \times (-3)}$ در نظر می‌گیریم؛ ابتدا $a^{\frac{1}{n}}$ را حساب می‌کنیم و حاصل را به توان -۳ می‌رسانیم.

مثال ۸

مقدارهای $4^{\frac{3}{2}}$ و $27^{-\frac{2}{3}}$ و $0.01^{-\frac{3}{2}}$ را محاسبه کنید.

$$4^{\frac{3}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = (27^{\frac{1}{3}})^{-2} = (\sqrt[3]{27})^{-2} = (3)^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$(0.01)^{-\frac{3}{2}} = (0.01^{\frac{1}{2}})^{-3} = (\sqrt{0.01})^{-3} = (0.1)^{-3} = \frac{1}{(0.1)^3} = \frac{1}{0.001} = 1000$$

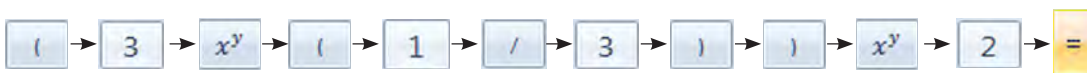
ویژگی‌های توان رسانی با عددهای صحیح، در توان رسانی با اعداد گویا نیز برقرار است.

توجه: در عبارت $((-9)^2)^{\frac{1}{4}}$ نمی‌توان توان‌ها را در هم ضرب کرد؛ زیرا به $(-9)^{\frac{2}{4}}$ تبدیل خواهد شد؛ در حالی که طبق تعریف، در توان رسانی به توان اعداد گویای غیر صحیح، پایه نباید منفی باشد. این عبارت به صورت زیر ساده می‌شود.

$$((-9)^2)^{\frac{1}{4}} = 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$$

استفاده از ماشین حساب

به کمک ماشین حساب ابتدا عدد $3^{\frac{2}{3}}$ و سپس عدد $(3^{\frac{1}{3}})^2$ را با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار بنویسید و سپس، درستی تساوی آنها را بررسی کنید.



همچنین ویژگی‌های

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

که در توان‌رسانی با عددهای صحیح برقرار بود در توان‌رسانی با اعداد گویا (با شرط $a > 0$ و $b > 0$) نیز برقرار است.

مثال ۹

محاسبات زیر را انجام دهید.

الف) $64^{\frac{1}{3}} \times 64^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 64^{\frac{5}{6}} = (64^{\frac{1}{6}})^5 = (\sqrt[6]{64})^5 = 2^5 = 32$

ب) $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = (8 \times 2)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

پ) $4^{-\frac{1}{3}} \times 4^{-\frac{1}{6}} = 4^{(-\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{6})} = 4^{-\frac{2+1}{6}} = 4^{-\frac{3}{6}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

ت) $3^{-\frac{2}{3}} \times 9^{-\frac{2}{3}} = (3 \times 9)^{-\frac{2}{3}} = 27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$



۱) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای $۶۴^{\frac{1}{3}}$ و $۶۴^{\frac{1}{2}}$ را بنویسید و آنها را ساده کنید. سپس حاصل را به دست آورید و نتیجه را با مثال ۹- الف مقایسه کنید.

$$۶۴^{\frac{1}{3}} \times ۶۴^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\dots} \times \sqrt{\dots} = \dots$$

۲) ابتدا نمایش رادیکالی اعداد $۸^{\frac{1}{2}}$ و $۲^{\frac{1}{2}}$ را بنویسید. سپس با استفاده از خواص ضرب رادیکال‌ها، حاصل را به صورت یک رادیکال بنویسید و ساده کنید. آنگاه نتیجه را با مثال ۹- ب مقایسه کنید.

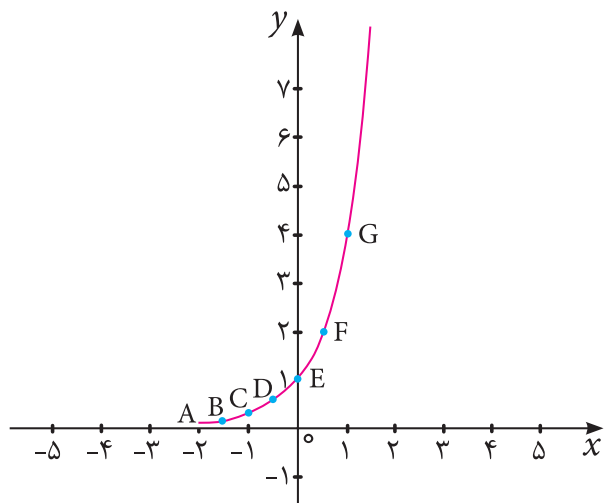
$$۸^{\frac{1}{2}} \times ۲^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dots} \times \sqrt{\dots} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{\dots} = \dots$$

۳) حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید. (در هر کدام بگویید از کدام خاصیت استفاده کرده‌اید).

الف) $۱۲۵^{\frac{2}{3}}$ ب) $۸^{-\frac{2}{3}}$ پ) $۶۴^{\frac{1}{12}} \times ۶۴^{\frac{3}{4}}$ ت) $\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^3$ ث) $\sqrt[3]{16} \times ۲^{\frac{2}{3}}$

آشنایی با توان‌های گویای عددهای مثبت موجب می‌شود بتوانیم توان‌های بیشتری از یک عدد را محاسبه کرده و به کمک آنها پدیده‌های طبیعی را به‌طور مناسب مدل‌سازی کنیم. برای مثال، در جدول زیر، برخی از توان‌های عدد ۴ را مشاهده کنید.

x	-۲	$-\frac{3}{2}$	-۱	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱
۴^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴
مختصات نقطه متناظر	A $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۱۶ \end{bmatrix}$	B $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ ۲ \\ ۱ \\ ۸ \end{bmatrix}$	C $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$	D $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ ۲ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$	E $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$	F $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$	G $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$



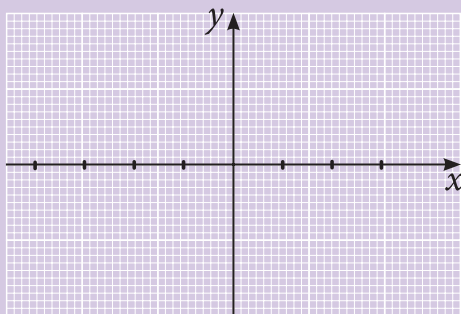
اگر مقادیر x را روی محور x ها و مقادیر 4^x را روی محور y ها مشخص کنیم و این نقاط را به یکدیگر متصل کنیم، نمودار زیر را خواهیم داشت. همان طور که دیده می‌شود نمودار 4^x یک خط راست نیست.

در جدول زیر، برخی از توان‌های عدد $\frac{1}{4}$ را می‌بینید:

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$(\frac{1}{4})^x$	16	2	1

(۱) جدول را کامل کنید.

(۲) مقادیر x را روی محور x ها و مقادیر $(\frac{1}{4})^x$ را روی محور y ها مشخص کرده و این نقاط را به یکدیگر متصل کنید.



(۳) آیا نمودار $(\frac{1}{4})^x$ ، یک خط راست است؟



۱) به جای نقطه‌چین‌ها عبارت مناسب قرار دهید.

الف) $7^2 = 49 \Rightarrow (49)^{\dots} = \sqrt{\dots} = \dots$

ب) $17^3 = 4913 \Rightarrow 4913^{\dots} = \sqrt[3]{\dots} = \dots$

پ) $13^4 = 28561 \Rightarrow 28561^{\dots} = \sqrt[4]{\dots} = \dots$

ت) $15^{-4} = \left(\frac{1}{15}\right)^4 = \frac{1}{50625} \Rightarrow \left(\frac{1}{50625}\right)^{\dots} = \sqrt[4]{\dots} = \dots$

ث) $\left(\frac{1}{3}\right)^9 = \dots \Rightarrow (\dots)^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{\dots} = \dots$

ج) $5^6 = 15625 \Rightarrow (15625)^{\dots} = \sqrt[6]{15625} = \dots$

چ) $(0/3)^5 = 0/00243 \Rightarrow (0/00243)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\dots} = \dots$

۲) در هر کدام از قسمت‌های زیر، مسئله‌ای در زمینه بیان شده طرح کنید که جواب آن، عدد توان‌دار

داده شده باشد:

الف) $4^{\frac{1}{4}}$: (تکثیر باکتری‌ها)

.....

ب) $27^{\frac{1}{3}}$: (زمینه هندسی)

.....

۳) هریک از عددها را به عدد مساوی آن در ستون مقابل وصل کنید.

- | | |
|---|-----------------------|
| $\frac{1}{4^3}$ ○ | ○ $\sqrt[4]{6}$ |
| $\frac{1}{3^4} \times \frac{1}{2^4}$ ○ | ○ $\sqrt[3]{2^2}$ |
| $\frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^3}$ ○ | ○ $\sqrt[6]{2^5}$ |
| $\frac{1}{3^3} \times \frac{1}{3^4} \times \frac{1}{3^3}$ ○ | ○ $\sqrt[12]{3^{11}}$ |
| $\frac{6}{3^2 \cdot 5}$ ○ | ○ $\frac{1}{9}$ |
| $\frac{2}{27^{\frac{2}{3}}}$ ○ | ○ ۶۴ |

۴) پاسخ هر یک از پرسش‌های زیر را به دو صورت عدد توان‌دار و عبارت رادیکالی نمایش دهید و در صورت امکان، ساده کنید.

الف) قطر یک مربع به طول ضلع ۵ چقدر است؟

.....

ب) وزن ۱ گرم از نوعی باکتری در هر ساعت ۸ برابر می‌شود. وزن باکتری پس از ۲۰ دقیقه چقدر می‌شود؟

.....

پ) طول ضلع مکعبی با حجم ۱۰۰۰ متر مکعب چقدر است؟

.....

ت) طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۶ و ۹ سانتی‌متر چقدر است؟

.....

۵) ابتدا نمایش رادیکالی عبارت‌های زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف) ریشه‌های دوم عدد ۱۲۱

ب) ریشه پنجم عدد ۳۲

پ) ریشه پنجم عدد -۳۲

ت) ریشه‌های ششم عدد $\frac{1}{64}$

ث) توان $\frac{1}{3}$ عدد ۲۷

ج) توان $\frac{1}{5}$ عدد ۳۲

۶) حاصل هر کدام از عبارت‌های زیر را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار و سپس، به صورت عبارت رادیکالی بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $4^{\frac{1}{4}} \times 4^{\frac{1}{3}}$

ب) $64^{-\frac{1}{2}} \times 64^{-\frac{1}{3}}$

پ) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{12}}$

ت) $5^{\frac{1}{3}} \times 25^{\frac{1}{3}}$

ث) $(3^{\frac{1}{3}})^2$

ج) $(27^{-2})^{\frac{1}{6}}$

۷) عبارت‌های زیر را ساده کنید.

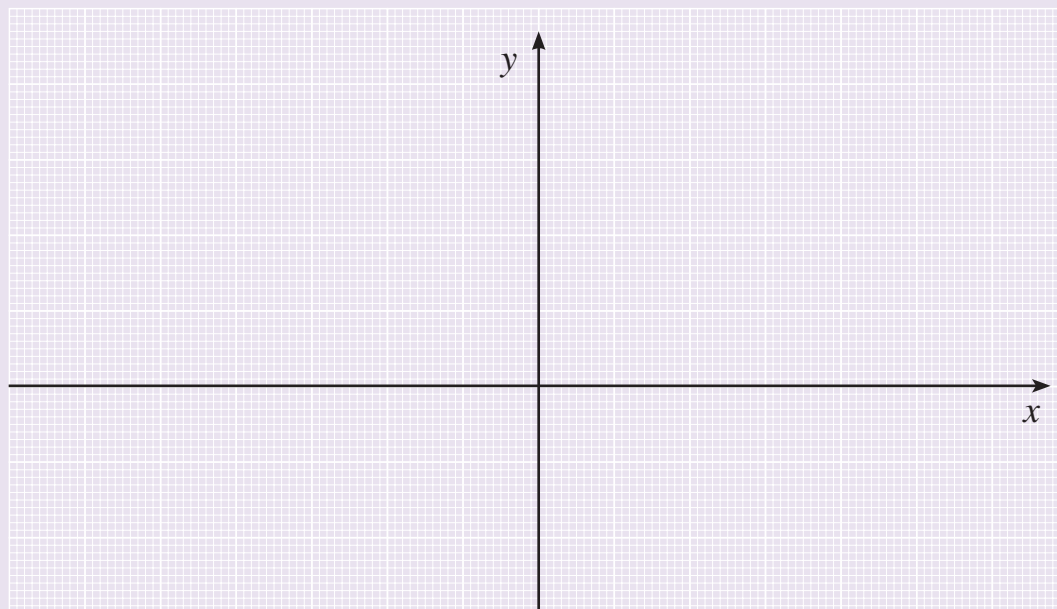
ب) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3}$

الف) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4}$

۸) با کامل کردن جدول زیر، نقاط آن را روی محورهای مختصات مشخص کنید و نقاط را به هم وصل کنید.

(برای محاسبه توان‌های گویا می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

x	-۱	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	۱
2^x





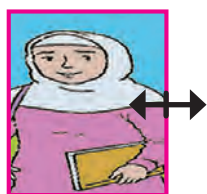
پودمان پنجم

نسبت‌های مثلثاتی



زاویه‌یاب دریایی، ابزاری است که از آن برای اندازه‌گیری زاویه‌ی بین خورشید یا ستارگان دیگر با افق، استفاده می‌شود. از طریق این اندازه‌گیری و به کمک مثلثات، مکان کشتی را تعیین می‌کنند. در صورتی که به طور افقی مورد استفاده قرار گیرد، برای اندازه‌گیری زاویه‌ی بین دو شیء در ساحل (یا دریا) نیز به کار می‌رود.

یکی از دوستان علاقه زیادی به عکس‌های خودش دارد. دلش می‌خواهد هر جا که بتواند عکس‌های خودش را ببیند! چند روز پیش که خانه‌شان رفته بودم، دیدم کمی در فکر است. از او پرسیدم به چه فکر می‌کند. عکسی از خودش در تعطیلات گذشته را نشان داد و گفت: چون از آن عکس خوشش آمده است، سعی کرده به کمک رایانه آن را به اندازه‌ای بزرگ کند که روی جلد کتابچه‌ای که سفرنامه‌هایش را در آن می‌نویسد، بچسباند. این بار به نظرم آمد که ابتکار خوبی بود. پرسیدم مشکل چیست؟ نتیجه کارش را نشان داد. با توجه به مکان فلش، خودتان حدس بزنید مشکل چه بود!

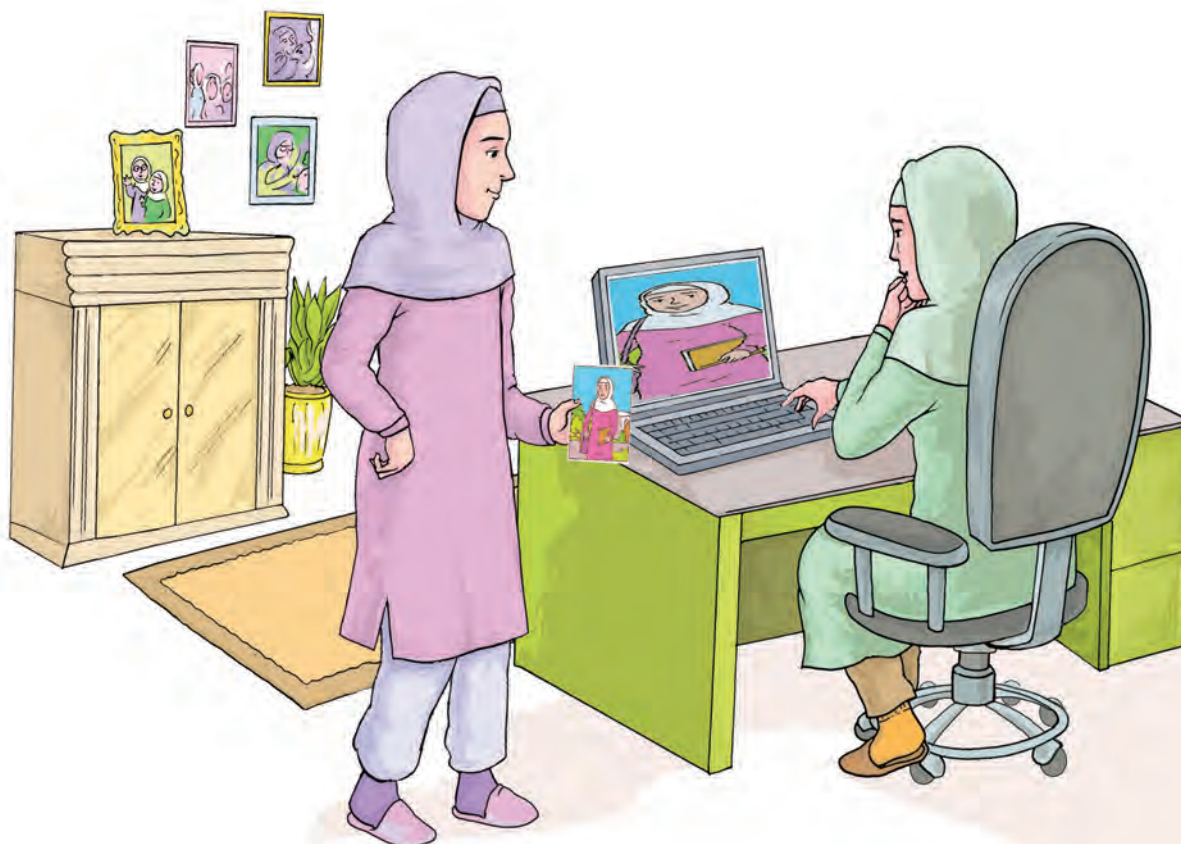


خودتان حدس بزنید مشکل چه بود!

گفتم: می‌توانم کمکت کنم. یک فعالیت می‌گویم. بعد از انجام آن متوجه می‌شوی مشکلت چیست؟

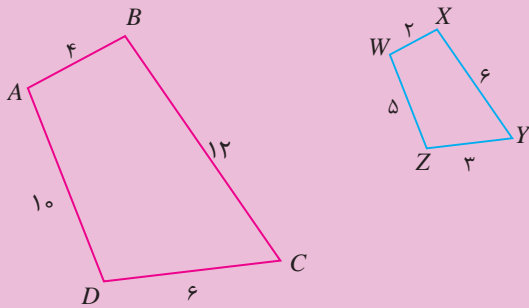
گفت: تو هم دبیر ریاضی شدی!؟

دیدم راست می‌گوید. چقدر از دبیر ریاضی‌ام تأثیر گرفته‌ام. ولی او چون خیلی مشتاق بود عکسش را بزرگ کند، قبول کرد تا فعالیتی را که به او می‌گویم انجام دهد.





دو شکل متشابه رو به‌رو را در نظر بگیرید.



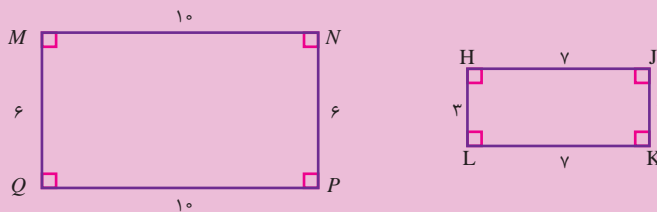
(۱) نسبت اضلاع متناظر را بنویسید.

(۲) هر یک از اضلاع $ABCD$ چند برابر اضلاع متناظرش در $WXYZ$ است؟

(۳) هر یک از اضلاع $WXYZ$ با اضلاع متناظرش در $ABCD$ چه رابطه‌ای دارد؟

(۴) نسبت اضلاع $ABCD$ به $WXYZ$ را با نسبت اضلاع $WXYZ$ به $ABCD$ مقایسه کنید.

(۵) در شکل‌های زیر، نسبت اضلاع متناظر را بنویسید. آیا دو شکل متشابه‌اند؟



فعالیت بالا نشان می‌دهد وقتی دو شکل متشابه هستند، نسبت بزرگ شدن یا کوچک شدن اضلاع یکی

به اضلاع متناظر دیگری مقداری ثابت است. به طور مثال در فعالیت ۱ داریم:

$$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{AD}{WZ} = k$$

یا

$$\frac{WX}{AB} = \frac{XY}{BC} = \frac{YZ}{CD} = \frac{WZ}{AD} = k'$$

در این صورت می‌گوییم: چهارضلعی $ABCD$ نسبت به چهارضلعی $WXYZ$ با ضریب k بزرگ شده است و آن را **بزرگ‌نمایی با ضریب $k > 1$** می‌نامیم، یا چهارضلعی $WXYZ$ نسبت به چهارضلعی $ABCD$ با ضریب k کوچک شده است و آن را **بزرگ‌نمایی با ضریب $1 < k < \infty$** می‌نامیم. در حالت $k=1$ ، دو شکل هم‌نهشت هستند.

کاردکلاس ۱

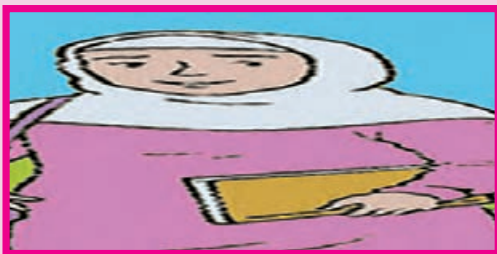


۱) نسبت اضلاع متناظر را برای دو شکل زیر بنویسید. آیا دو شکل متشابه‌اند؟ توضیح دهید چرا؟

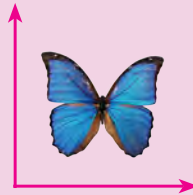


.....

.....



(۲) تصویر زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

الف) اگر عرض هر نقطه روی شکل (۱) را ثابت نگه داشته و طول نقاط آن را ۳ برابر کنیم، کدام شکل به دست می‌آید؟ چرا؟

.....

ب) کدام شکل را می‌توان با ۳ برابر کردن عرض نقاط و ثابت نگه داشتن طول نقاط شکل (۱) به دست آورد؟

.....

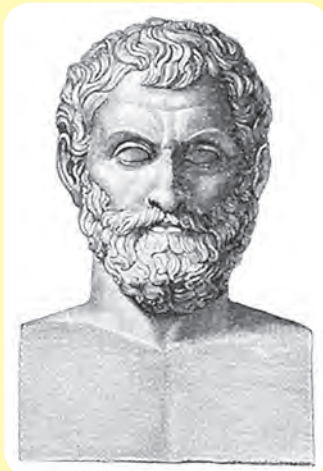
پ) در کدام شکل، طول و عرض تمام نقاط ۳ برابر طول و عرض تمام نقاط متناظر در شکل (۱) است؟

.....



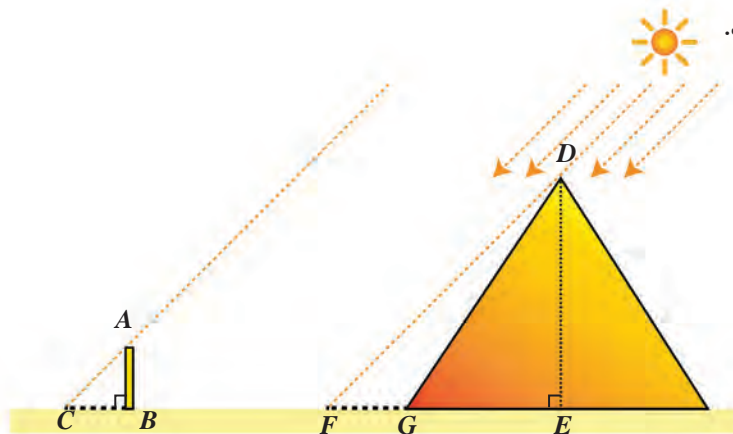
در ادامه، داستان زیر از **تالس** را برایش تعریف کردم.
می‌گویند زمانی که **تالس** در مصر اقامت داشت، توانست به کمک تشابه مثلث‌ها، ارتفاع اهرام مصر را اندازه‌گیری کند. او چوبی با طول مشخص را نزدیک اهرام، به طور عمودی در زمین فرو کرد و سپس به هنگام تابش خورشید، هم‌زمان طول سایه چوب و سایه اهرام را اندازه‌گیری کرد.

تالس ملطی در حدود سال ۶۲۴ پیش از میلاد در شهر میلیتوس در «ایونیا» غرب ترکیه



امروزی به دنیا آمد. تالس بیشتر وقت خود را صرف مطالعه ریاضیات و ستاره‌شناسی کرد. عقیده بر آن است که تالس پس از مسافرت به مصر، هندسه را برای یونانیان به ارمغان برد. در ریاضیات، قضیه تالس را به وی نسبت می‌دهند. مورخی به نام پروکلوس گزارش می‌دهد که تالس توانست با کشف این قضیه، فاصله کشتی‌ها را تا ساحل تعیین کند. تالس در واقع ارتفاع اهرام مصر را از طریق اندازه‌گیری سایه آنها اندازه‌گیری کرد.

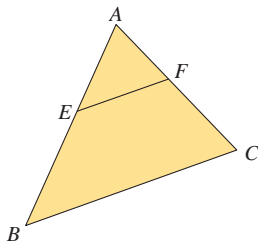
طبق نظر تالس، مثلث‌های DEF و ABC متشابه‌اند، او با داشتن طول چوب (AB) و طول سایه چوب (CB) و طول سایه هرم $(EF - EG)$ ، با مشخص کردن اضلاع متناظر و نوشتن نسبت طول اضلاع متناظر، ارتفاع هرم را به دست آورد.



دوستم پرسید: تالس از کجا می‌دانست آن دو مثلث متشابه‌اند؟ از روی شکل، ما فقط تساوی زاویه‌های متناظر را می‌توانیم ثابت کنیم (چگونه؟). آیا شرط تساوی زاویه‌ها برای تشابه دو مثلث کافی است؟
گفتم: در حالت کلی با داشتن تساوی زاویه‌ها، نمی‌توان تشابه دو شکل را نتیجه گرفت (به سؤال ۵ در فعالیت ۱ توجه کنید)، ولی این شرط برای تشابه دو مثلث کافی است و این از نتایج رابطه‌ای است که تالس بیان کرده است.

مثال ۱

در یک مثلث دلخواه ABC از نقطه E روی ضلع AB ، خطی به موازات ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطه F قطع کند. دو مثلث AEF و ABC زاویه‌های مساوی دارند؛ چرا؟ پس، با هم متشابه‌اند و داریم:



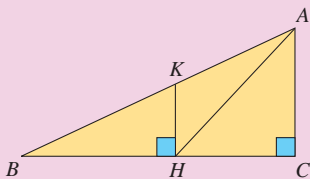
$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC که در رأس C قائمه است، KH بر BC عمود است.
الف) کدام مثلث‌ها متشابه‌اند؟ چرا؟

کاردرکلاس ۲



ب) نسبت‌های اضلاع متناظر را بنویسید.



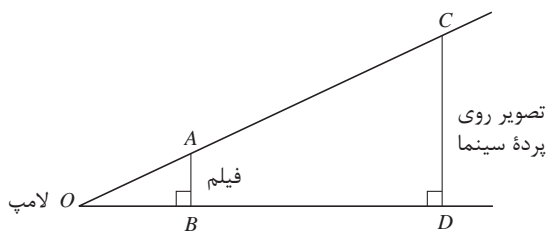
۵-۲- تانژانت یک زاویه

در یکی از هنرستان‌ها، هنرجویان را به همراه دبیر ریاضی به دیدن فیلمی برده بودند. منوچهر که مشغول دیدن فیلم بود، گاهی برمی‌گشت و به پشت سرش نگاه می‌کرد. پس از بازگشت به مدرسه، دبیر از منوچهر پرسید:

چرا به پشت سرت نگاه می‌کردی؟ آیا سؤالی برایت پیش آمده بود؟

منوچهر گفت: بله، می‌خواستم بدانم تصویر به آن بزرگی چگونه روی پرده سینما تشکیل می‌شود. آیا بزرگی یا کوچکی تصویر با فاصله پرده از چشمه نور ارتباط دارد؟

دبیر گفت: برای درک این مطلب، بهتر است شکلی رسم کنیم. شکل زیر می‌تواند اندازه تصویر روی پرده سینما و اندازه فیلم را به شما نشان دهد.



خواندنی



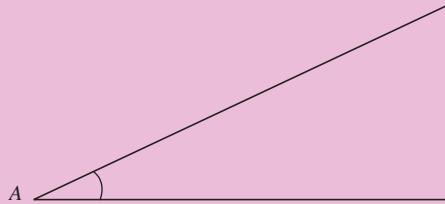
اولین کسانی که از مثلثات استفاده می‌کردند یونانیان بودند. در یونان قدیم از مثلثات برای تعیین طول مدت روز یا طول سال (با مشخص کردن موقعیت ستارگان در آسمان) استفاده می‌شد. بعدها ریاضی‌دانان و منجمان هندی نیز پیشرفت‌هایی در مثلثات به دست آوردند ولی پیشرفت این علم مدیون دانشمندان مسلمان است. مسلمانان بیشترین نقش را در پیشرفت این علم ایفا کردند و سپس این اندوخته‌ها را در قرون وسطی به اروپاییان منتقل کردند. اروپاییان نیز از دانش فراوان مسلمانان در مثلثات استفاده کردند و این علم را توسعه داده و به شکل امروزی درآوردند.

فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا بتوانید رابطه بین اندازه تصویر روی پرده سینما و اندازه فیلم و فاصله با چشمه نور را به دست آورید.

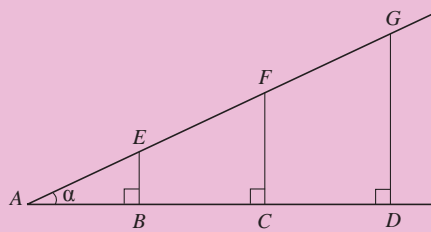
فعالیت ۲



در شکل روبه‌رو، یک زاویه تند به رأس A رسم شده است.



(۱) روی یک ضلع این زاویه چند نقطه دلخواه مانند B و C و D در نظر بگیرید. از این نقاط، عمودهایی بر این ضلع رسم کنید تا ضلع دیگر زاویه را قطع کنند. نقاط تقاطع را به ترتیب E ، F و G بنامید.



(۲) با اندازه‌گیری به کمک خط‌کش، درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{EB}{AB} = \frac{FC}{AC} = \frac{GD}{AD}$$

(۳) تشابه مثلث‌هایی را که در شکل دیده می‌شوند، بررسی کنید و به کمک آن درستی تساوی‌های بالا را نشان دهید.

فعالیت بالا نشان می‌دهد که در مسئله اندازه تصویر در سینما، نسبت اندازه فیلم به فاصله فیلم تا چشمه نور، با نسبت اندازه تصویر روی پرده به فاصله پرده تا چشمه نور مساوی است. پس، هرچه پرده از منبع نور دورتر شود، باید اندازه تصویر بزرگ‌تر شود تا نسبت آنها تغییر نکند و هر چه پرده به منبع نور نزدیک‌تر شود، اندازه تصویر هم کوچک‌تر می‌شود تا نسبت آنها تغییر نکند.

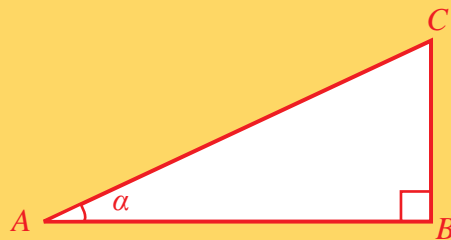
با داشتن زاویه رأس A ، مقدار نسبت $\frac{EB}{AB}$ در شکل فعالیت ۲ به انتخاب نقطه B بستگی ندارد و مقدار ثابتی است، این مقدار را **تانژانت** این زاویه می‌نامند.

تعریف



در مثلث قائم‌الزاویه ABC یک زاویه تند را انتخاب کنید و آن را α بنامید (مثلاً زاویه به رأس A). بنا به تعریف، نسبت $\frac{BC}{AB}$ را تانژانت زاویه α می‌نامند و با $\tan \alpha$ نشان می‌دهند. این نسبت فقط به α بستگی دارد و آن را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\text{تانژانتِ آلفا} = \tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{طول ضلع مجاور به } \alpha} = \frac{BC}{AB}$$

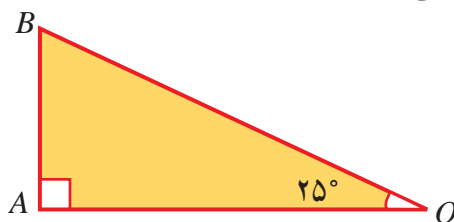


مثال ۲

با رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زاویه‌های آن 25° درجه باشد، تانژانت زاویه 25° درجه را بیابید.

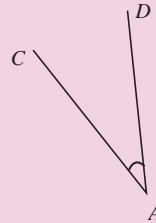
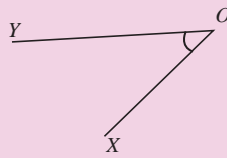
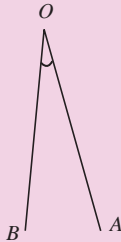
ابتدا به کمک نقاله، یک زاویه 25° درجه رسم می‌کنیم و مطابق شکل، مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که ضلع مجاور زاویه 25° درجه (OA) مقدار مشخصی، مثلاً 10 سانتی‌متر، باشد. طبق شکل، با اندازه‌گیری

طول ضلع AB تقریباً $4/6$ سانتی‌متر است. بنابراین، $\tan 25^\circ$ تقریباً برابر است با $\frac{4/6}{10} = 0/46$.

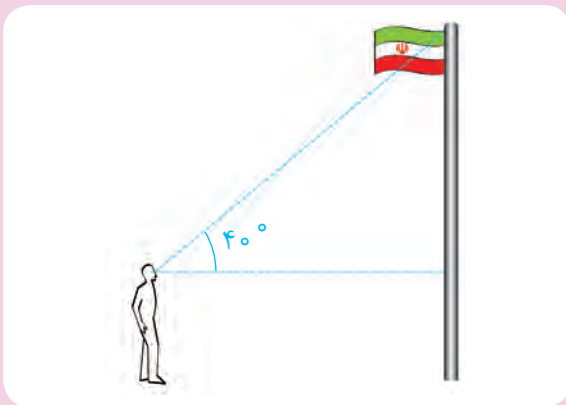




۱) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های زیر را با اندازه‌گیری به وسیله خط‌کش محاسبه کنید.



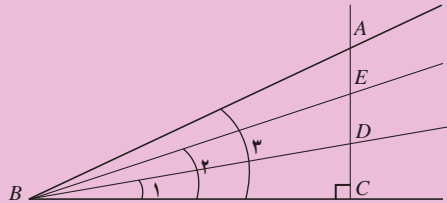
۲) علی با یادگیری مفهوم تانژانت فهمید که می‌تواند طول ارتفاع تیرک پرچم مدرسه‌اش را اندازه‌گیری کند. او زاویه دید خود به نوک تیرک را با سطح افق، تقریباً 40° درجه تخمین زد. قد علی ۱۶۵ سانتی‌متر و فاصله او تا تیرک پرچم ۱۱ متر است. با این اطلاعات، او چگونه می‌تواند طول ارتفاع تیرک را به‌طور تقریبی بیابد؟



سؤال‌هایی که درباره مفهوم تانژانت پیش می‌آید، این است که تانژانت یک زاویه تند چه اعدادی می‌تواند باشد و تغییر اندازه یک زاویه، چه تأثیری در اندازه تانژانت آن زاویه دارد. فعالیت زیر می‌تواند در پیدا کردن جواب این سؤال‌ها به شما کمک کند.



در شکل زیر AC بر BC عمود است.



(۱) هر یک از نسبت‌های $\frac{DC}{BC}$ ، $\frac{EC}{BC}$ و $\frac{AC}{BC}$ چه چیزی را نشان می‌دهند؟

.....

(۲) با بزرگ شدن زاویه‌ای که در رأس B تشکیل می‌شود، این نسبت‌ها چگونه تغییر می‌کنند؟ چرا؟

.....

(۳) با تغییر یک زاویه، تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟

.....

(۴) آیا می‌توان زاویه‌ای یافت که تانژانت آن برابر ۹ باشد؟ (راهنمایی: در چه صورت نسبت‌های بالا برابر با ۹ است؟) جواب این سؤال برای عددهای مثبت دیگر چیست؟

.....

(۵) زاویه‌ای رسم کنید که تانژانت آن ۹ باشد.

فعالیت بالا نشان می‌دهد که با بزرگ شدن یک زاویه تند، تانژانت آن نیز بزرگ می‌شود و هر عدد مثبتی، می‌تواند تانژانت زاویه‌ای باشد.

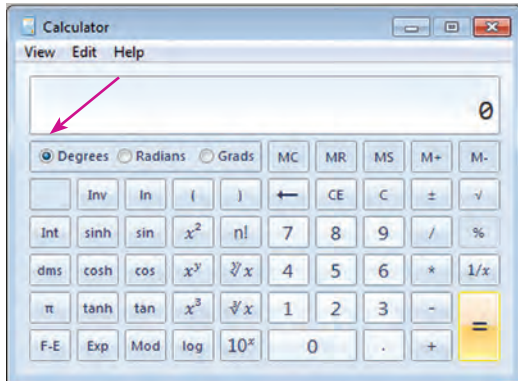
مثال ۳



تانژانت چه زاویه‌ای برابر ۵ است؟

مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که طول اضلاع زاویه قائمه آن ۱ و ۵ واحد باشد. با نقله، زاویه مجاور به ضلع به طول ۱ را اندازه می‌گیریم که تقریباً ۷۸ درجه می‌شود. تانژانت ۷۸ درجه تقریباً ۵ است. برای حل این مسئله می‌توان از هر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در آن نسبت اضلاع زاویه قائمه ۵ باشد استفاده کرد.

استفاده از ماشین حساب



تانژانت زاویه ۳۰ درجه را با ماشین حساب به دست آورید. توجه داشته باشید که ماشین حساب باید در حالت Degrees (به معنای درجه) باشد.



۱) اگر زاویه تندی به صفر نزدیک شود، تانژانت آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ درستی ادعای خود را با رسم شکل نشان دهید.

۲) اگر زاویه تندی به ۹۰ درجه نزدیک شود، در مورد تغییرات اندازه تانژانت آن چه می‌توان گفت؟ (راهنمایی: به کمک ماشین حساب، برای مقادیر تانژانت زاویه‌های نزدیک به ۹۰ درجه جدولی بسازید.)

کاردکلاس ۴

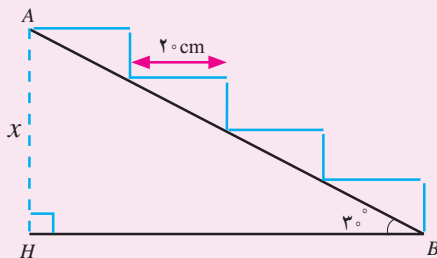




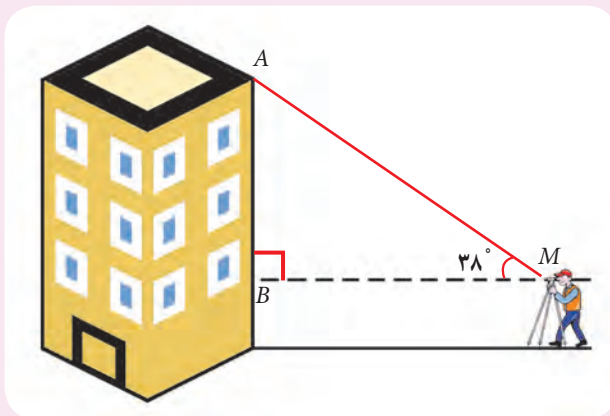
۱) ابتدا به کمک رسم شکل و سپس با ماشین حساب مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های 40° و 50° درجه را پیدا کنید.

۲) تانژانت چه زاویه‌ای برابر ۸ خواهد شد؟

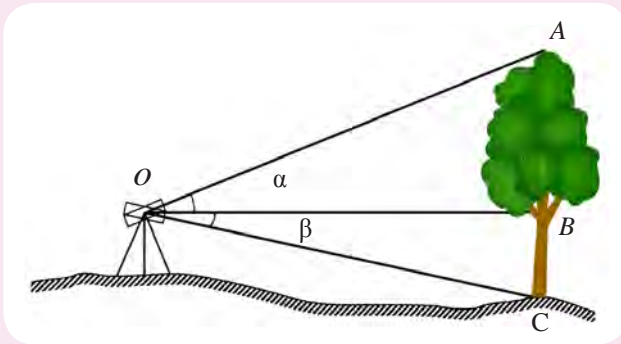
۳) با توجه به شکل روبه‌رو، ارتفاع نقطه A از زمین را بیابید (عرض همه پله‌ها 20 cm است).



۴) برای محاسبه ارتفاع ساختمانی، دوربین زاویه‌یاب را در یک سطح افقی در نقطه M به فاصله 15 متری از ساختمان (نقطه B) مستقر کرده‌ایم و به نقطه بالای ساختمان نشانه می‌رویم. زاویه دید برابر 38° درجه به دست آمده است. اگر ارتفاع دوربین از زمین یک متر و 54 سانتی‌متر باشد، ارتفاع ساختمان را به دست آورید.



۵) به کمک دوربین زاویه‌یاب، زاویه‌های α و β به ترتیب 23° درجه و 10° درجه به دست آمده‌اند و فاصله افقی دوربین تا درخت 18 متر است. با توجه به شکل، ارتفاع درخت را پیدا کنید.



.....

.....

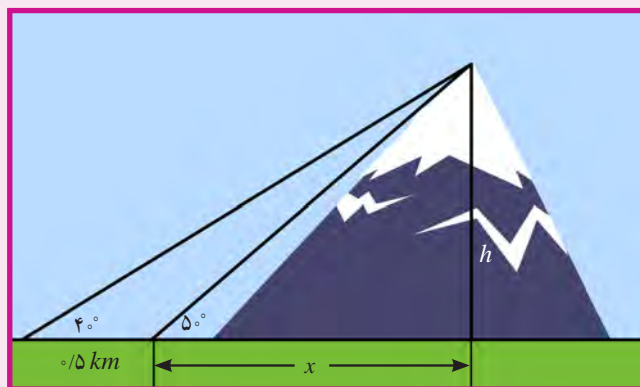
.....

.....

۶) یک مهندس نقشه‌بردار، برای محاسبه ارتفاع یک کوه در نقطه‌ای می‌ایستد و مشاهده می‌کند که در آن نقطه، نوک کوه با زاویه 50° درجه نسبت به افق دیده می‌شود. پس از آنکه نیم‌کیلومتر از کوه دور می‌شود، مشاهده می‌کند که نوک کوه با زاویه 40° درجه دیده می‌شود. ارتفاع کوه چقدر است؟

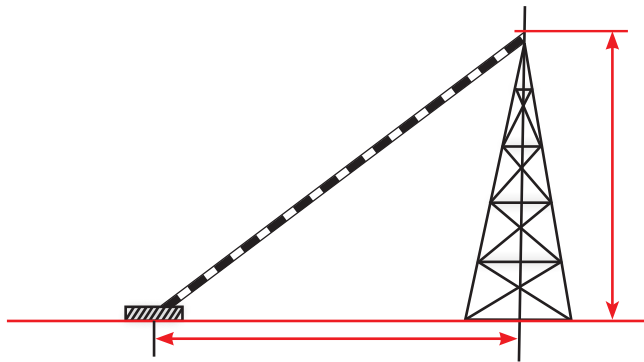
.....

.....



۵-۳- سینوس یک زاویه

فرزانه در راه مدرسه، کارگرانی را دید که در حال نصب یک دکل مخابراتی بودند. او مشاهده کرد که کارگران برای نگهداری دکل‌ها از سیم نگهدارنده‌ای که به زمین متصل شده است، استفاده می‌کنند. با این مشاهدات، او در کلاس ریاضی از دبیر پرسید که مهندسان چگونه می‌فهمند که برای نگهداری دکل چقدر سیم لازم است؟



دبیر گفت: فعالیت صفحهٔ روبه‌رو به شما در حل این مسئله کمک می‌کند.



ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی، یکی از مفاخر علمی ایران و متولد ۳۲۸ هجری قمری که در سوم رجب سال ۳۸۸ هجری قمری درگذشته است. وی اهل بوژگان کهنویسی بوده که در هجده کیلومتری شرق شهر تربت جام قرار دارد.

فعالیت‌های علمی بوزجانی دامنهٔ وسیعی از علوم مختلف، مانند هندسه، مثلثات، حساب و نجوم را در بر می‌گرفته است و او در تمام این علوم به دستاوردهای بدیع و تازه‌ای رسیده است.

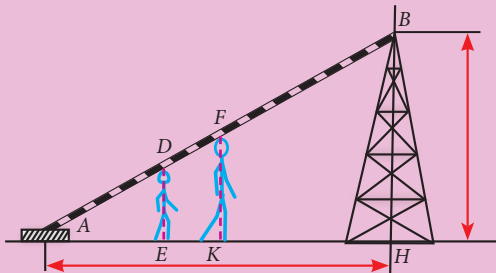
خواندنی





فرض کنید دکلی به ارتفاع ۶۰ متر با سیمی که با سطح افق زاویه 30° درجه ساخته است، مهار می‌شود. کارگری زیر این سیم در نقطه‌ای مانند E چنان می‌ایستد که سیم در نقطه‌ای مانند D با

سرش تماس پیدا کند. کارگر دیگری به وسیله یک متر فلزی، فاصله A تا D را اندازه‌گیری می‌کند و نسبت $\frac{DE}{AD}$ را حساب می‌کند.

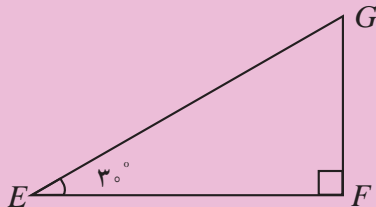


(۱) کارگرانی با طول قد‌های متفاوت، این کار را تکرار

می‌کنند و هر کدام، مقداری را برای نسبت طول قد به فاصله سر تا نقطه A به دست می‌آورند. نشان دهید همه آنها یک مقدار را به دست می‌آورند.

(۲) اگر نسبت $\frac{BH}{AB}$ را حساب کنیم، مقدار آن با نسبتی که کارگران به دست آورده‌اند چه رابطه‌ای دارد؟ چرا؟

(۳) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه، مانند شکل زیر، که یک زاویه آن 30° درجه است، نشان دهید نسبتی که کارگران به دست آورده‌اند، برابر است با $\frac{FG}{EG}$. این نسبت را با اندازه‌گیری با خط‌کش به دست آورید. (راهنمایی: تشابه دو مثلث AHB و EFG را نشان دهید.)

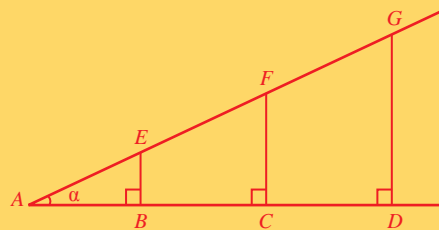


(۴) با استفاده از این نسبت، طول سیم نگهدارنده دکل را حساب کنید.



برای هر زاویه تند α مانند شکل زیر، همه نسبت‌های $\frac{GD}{AG}$ ، $\frac{FC}{AF}$ و $\frac{EB}{AE}$ طبق تشابه مثلث‌ها، با هم مساوی‌اند. مقدار این نسبت‌های برابر را سینوس زاویه α می‌نامند و آن را با $\sin \alpha$ نشان می‌دهند.

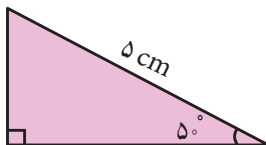
$$\sin \alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF} = \frac{DG}{AG} = \frac{\text{طول ضلع روبه‌روی } \alpha}{\text{طول وتر}}$$



مثال ۴

سینوس زاویه 5° درجه را به دست آورید.

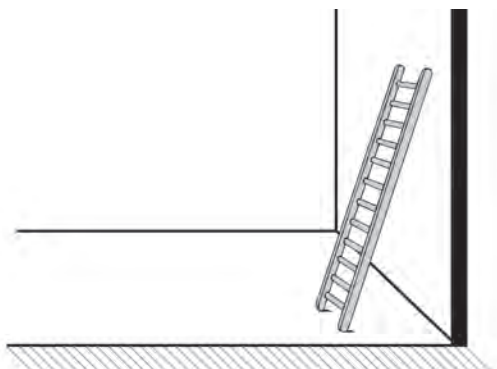
به کمک نقاله، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویه آن 5° درجه و طول وتر آن ۵ سانتی‌متر باشد. با خط‌کش، طول ضلع روبه‌رو به این زاویه را اندازه می‌گیریم که تقریباً $\frac{3}{8}$ سانتی‌متر است. پس،



$$\sin 5^\circ \text{ تقریباً برابر است با } \frac{3/8}{5} = 0/76$$

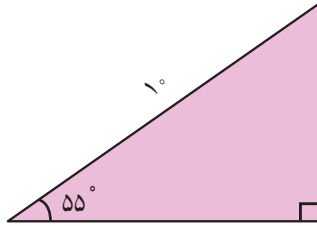
مثال ۵

نردبانی به طول ۶ متر را به دیواری تکیه داده‌ایم. اگر زاویه نردبان با سطح افق 55° درجه باشد، فاصله انتهای نردبان تا سطح زمین را پیدا کنید.



مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویه آن 55° درجه و وتر آن ۱۰ سانتی‌متر باشد. با اندازه‌گیری

اضلاع این مثلث به کمک خط کش، سینوس زاویه ۵۵ درجه را پیدا می‌کنیم: $\sin 55^\circ \approx 0/82$. بنابراین، فاصله انتهای نردبان تا سطح زمین از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\sin 55^\circ = \frac{\text{فاصله انتهای نردبان تا سطح زمین}}{6} \Rightarrow \text{فاصله انتهای نردبان تا سطح زمین} = 6 \times 0/82 = 4/92 \text{ m}$$

به کمک نقاله و با رسم چند مثلث قائم الزاویه، مقدار تقریبی سینوس زاویه‌های ۲۰ و ۳۵ و ۴۰ درجه را بیابید.

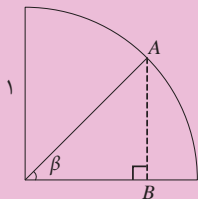
کاردرکلاس ۵



درباره مفهوم سینوس نیز، این سؤال پیش می‌آید که تغییر اندازه یک زاویه چه تأثیری در اندازه سینوس آن زاویه دارد؟ فعالیت زیر می‌تواند در پیدا کردن جواب این سؤال به شما کمک کند.

یک ربع دایره به شعاع ۱ واحد، مانند شکل زیر رسم کنید.

(۱) نقطه A را روی ربع دایره انتخاب کنید و از آن عمود AB را مطابق شکل رسم کنید. طول پاره خط



AB چه رابطه‌ای با زاویه تند β دارد؟.....

(۲) با کم یا زیاد شدن زاویه β ، سینوس آن چگونه تغییر می‌کند؟
.....

(۳) با نزدیک شدن اندازه زاویه β به صفر، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟.....

(۴) با نزدیک شدن زاویه β به ۹۰ درجه، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟.....

(۵) سینوس β چه عددهایی می‌تواند باشد؟.....

فعالیت ۵



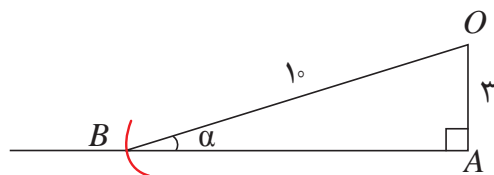
فعالیت ۵ نشان می‌دهد که سینوس زاویه‌های تند، عددهایی بین صفر و ۱ هستند. با بزرگ شدن زاویه، سینوس آن نیز بزرگ می‌شود.

اگر عددی مانند a را به صورت $0 < a < 1$ در نظر بگیریم، آیا زاویه‌ای وجود دارد که سینوس آن برابر a شود؟ مثال زیر می‌تواند پاسخی برای این سؤال فراهم کند.

مثال ۶

زاویه‌ای بسازید که سینوس آن برابر $3/5$ باشد.

یک زاویه راست با رأس A مانند زیر رسم می‌کنیم. روی یک ضلع آن پاره‌خط OA به طول ۳ واحد جدا می‌کنیم. به مرکز نقطه O کمانی از دایره‌ای به شعاع 5 واحد را رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر را در نقطه‌ای که B می‌نامیم، قطع کند. زاویه ABO در رأس B زاویه مورد نظر است و با نقاله آن را اندازه می‌گیریم که تقریباً 37 درجه است.





۱- الف) سینوس زاویه ۲۵ درجه را با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب به طور تقریبی محاسبه کنید.

.....

ب) یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که زاویه رأس آن 50° درجه باشد. اگر قاعده این مثلث ۱۰ سانتی‌متر باشد، طول ساق آن را تعیین کنید.

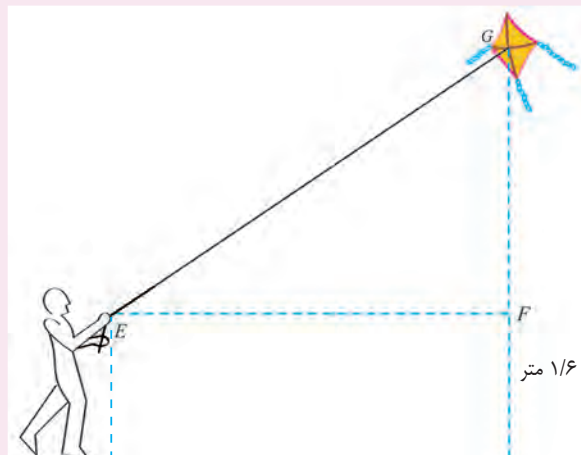
.....

۲) سینوس چه زاویه‌ای برابر $0/8$ است؟

.....

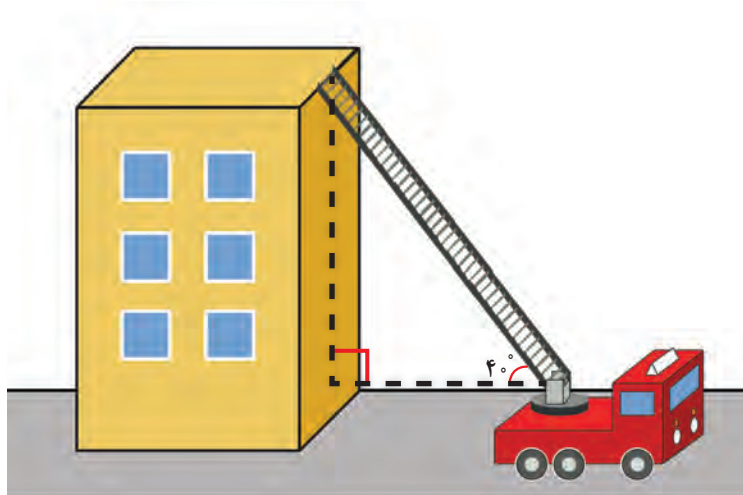
۳) رضا بادبادکی را به هوا فرستاده است. فرض کنید ۴۵ متر نخ بادبادک او رها شده است. طبق شکل، زاویه نخ با سطح افق 39° درجه و فاصله دست رضا از سطح زمین، یک متر و شصت سانتی‌متر است. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟

.....



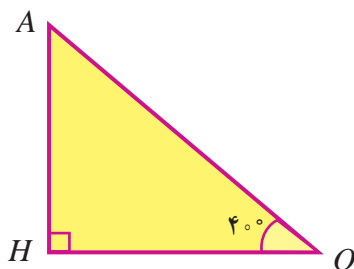
۵-۴- کسینوس یک زاویه

یک روز، دبیر ریاضی در کلاس داستانی دربارهٔ پله‌های نردبان ماشین آتش‌نشانی تعریف کرد. او گفت: دیروز برای خرید از منزل خارج شده بودم که متوجه شدم طبقهٔ اول یک ساختمان سه طبقه، آتش گرفته است. آتش در حال سرایت به طبقات بالاتر بود و همهٔ ساکنان ساختمان در نقطه‌ای در پشت بام جمع شده بودند. پای نردبان ماشین آتش‌نشانی در فاصلهٔ حدوداً ۱۵ متری ساختمان قرار داشت. ماشین آتش‌نشانی نردبان خود را با زاویهٔ تقریبی 40° درجه نسبت به افق باز کرد تا به پشت بام رسید. آیا می‌توانید بگویید که نردبان ماشین آتش‌نشانی برای رسیدن به پشت بام چند متر باز شده بود؟



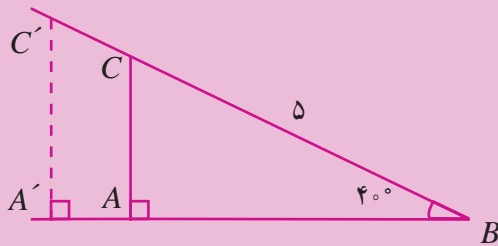
علی گفت: بهتر است یک شکل بکشیم و از روی آن، مسئله را حل کنیم. باید از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ آن 40° درجه است، استفاده کنیم. اگر محل تجمع ساکنان ساختمان روی پشت بام نقطهٔ A و پای نردبان، نقطهٔ O و H نقطه‌ای در روی ساختمان باشد به طوری که OH سطح افق را نشان دهد، مثلث زیر را می‌توان رسم کرد.

طول OH و اندازهٔ زاویهٔ رأس O را می‌دانیم ولی طول AO را نمی‌دانیم. دبیر گفت: برای ادامهٔ حل این مسئله می‌توانید از فعالیت ۷ کمک بگیرید.





(۱) یک زاویه 40° درجه رسم کنید و مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که وتر آن ۵ سانتی‌متر باشد.



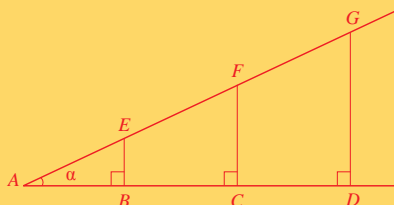
(۲) با اندازه‌گیری اضلاع به کمک خط‌کش، نسبت $\frac{AB}{BC}$ را بیابید.

(۳) مثلث قائم‌الزاویه دیگری مانند $A'BC'$ با همین زاویه و طول وتر متفاوت رسم کنید و نسبت $\frac{A'B}{BC'}$ را محاسبه کنید. نشان دهید $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B}{BC'}$. آیا مقادیر نسبت‌هایی که با اندازه‌گیری به دست آورده‌اید باهم برابرند؟ اگر خیر، چرا؟

(۴) به کمک نسبتی که در بالا به دست آورده‌اید، طول نردبان آتش‌نشانی را حساب کنید.

فعالیت بالا نشان می‌دهد که همه نسبت‌های به دست آمده، با هم مساوی‌اند و مقدار آنها وابسته به زاویه 40° درجه است. این نسبت را **کسینوس زاویه 40°** درجه می‌نامند. برای هر زاویه تند دیگری نیز می‌توان این محاسبات را انجام داد.

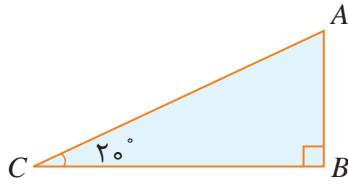
برای هر زاویه تند α مانند شکل زیر، نسبت‌های $\frac{AD}{AG}$ و $\frac{AC}{AF}$ و $\frac{AB}{AE}$ طبق تشابه مثلث‌ها، با هم مساوی‌اند. مقدار این نسبت‌های برابر را **کسینوس زاویه α** می‌نامند و آن را با $\cos \alpha$ نشان می‌دهند.



$$\cos \alpha = \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AG} = \frac{\text{طول ضلع مجاور } \alpha}{\text{طول وتر}}$$



مثال ۷



مقدار تقریبی کسینوس 20° درجه را محاسبه کنید.

ابتدا یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه را که یک زاویه 20° درجه داشته باشد، رسم می‌کنیم. در شکل روبه‌رو، زاویه رأس C ،

20° درجه است. سپس به وسیله خط‌کش طول ضلع BC و وتر AC را اندازه‌گیری می‌کنیم و نسبت

$$\frac{BC}{AC} \text{ را حساب می‌کنیم. نتیجه تقریبی این محاسبه نشان می‌دهد که } \cos 20^\circ \approx 0.93.$$

کارد کلاس ۶



(۱) یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین رسم کنید.

(الف) نشان دهید زاویه‌های تند این مثلث 45° درجه‌اند.

(ب) اگر طول ساق‌ها را به اندازه یک واحد در نظر بگیریم، طول وتر این مثلث چقدر است؟

(پ) با استفاده از محاسبات بالا، سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه 45° درجه را به دست آورید.

(۲) مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱ واحد را در نظر بگیرید و یکی از ارتفاع‌های آن را رسم کنید.

(الف) طول ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه رسم شده را حساب کنید.

(ب) با استفاده از محاسبات انجام شده، سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه‌های 30° و 60° درجه را به دست آورید.

(۳) به کمک دو سؤال بالا، جدول روبه‌رو را کامل کنید.

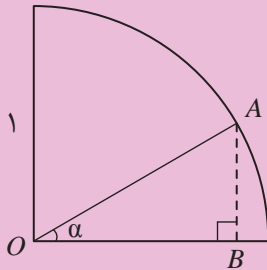
نسبت مثلثاتی \ زاویه	30° درجه	45° درجه	60° درجه
سینوس			
کسینوس			
تانژانت			

در باره مفهوم کسینوس نیز این سؤال پیش می‌آید که تغییر اندازه یک زاویه چه تأثیری در اندازه کسینوس آن زاویه دارد. فعالیت زیر می‌تواند در پیدا کردن جواب این سؤال به شما کمک کند.

فعالیت ۷



یک ربع دایره به شعاع واحد، مانند شکل زیر، رسم کنید.



نقطه A را روی ربع دایره انتخاب کنید. طول پاره‌خط OB چه رابطه‌ای با زاویه α دارد؟

(۱) با کم یا زیاد شدن زاویه تند α ، کسینوس آن چه تغییری می‌کند؟

(۳) کسینوس زاویه α چه اعدادی می‌تواند باشد؟

(۴) با نزدیک شدن اندازه زاویه α به صفر، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

(۵) با نزدیک شدن زاویه α به 90° درجه، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

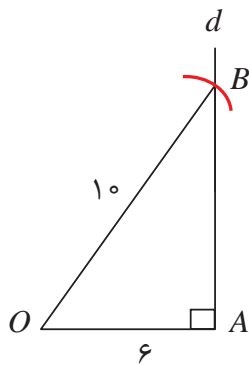
فعالیت بالا نشان می‌دهد که کسینوس زاویه‌های تند، اعدادی بین صفر و ۱ هستند. با بزرگ شدن زاویه، کسینوس آن زاویه کوچک‌تر می‌شود.

اگر عددی مانند b به صورت $0 < b < 1$ در نظر بگیریم، آیا زاویه‌ای وجود دارد که کسینوس آن برابر b شود؟ با حل مثال ۸ می‌توان به این سؤال پاسخ داد.

مثال ۸

زاویه‌ای بسازید که کسینوس آن برابر $6/10$ باشد.

مانند شکل زیر، پاره خطی (OA) به طول ۶ واحد رسم می‌کنیم. در نقطه A ، خط d را عمود بر این پاره‌خط رسم می‌کنیم. کمانی به مرکز O و شعاع 10 واحد رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ای که B می‌نامیم، قطع کند. زاویه به دست آمده در رأس O جواب مسئله است. اگر با نقاله آن را اندازه بگیریم تقریباً 53 درجه است.





(۱) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب، کسینوس زاویه‌های 15° و 75° درجه را حساب کنید.

(۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد b به صورت $0 < b < 1$ ، بتوان زاویه‌ای پیدا کرد که کسینوس آن برابر b باشد.

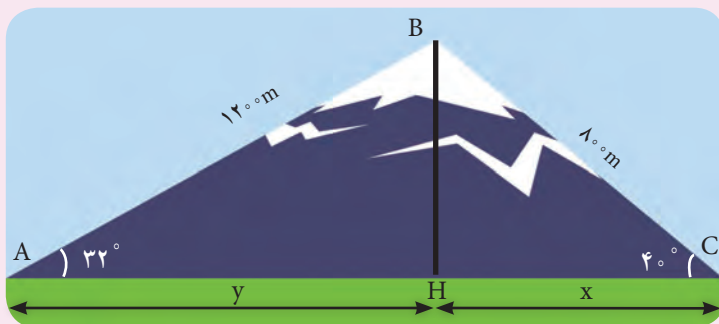
(۳) زمین بزرگی به شکل مثلث متساوی‌الساقین به قاعده 100 متر و با زاویه مجاور به قاعده 50° درجه است.

(الف) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب، از طریق اندازه‌گیری با خط‌کش، کسینوس زاویه 50° درجه را به طور تقریبی محاسبه کنید.

(ب) طول اضلاع زمین مثلث شکل را بیابید.

(پ) مساحت زمین را بیابید.

(۴) حسن و علی در یک روز تعطیل می‌خواهند از دو نقطه متفاوت و هم‌سطح در دو مسیر مختلف از پای کوه تا قله آن بروند. علی با زاویه 32° درجه و حسن با زاویه 40° درجه از کوه بالا می‌روند. علی پس از طی 1200 متر و حسن پس از طی 800 متر به قله کوه می‌رسند. فاصله علی و حسن را در پای کوه محاسبه کنید.



۵) درستی یا نادرستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $\cos 2^\circ < \cos 4^\circ$

ب) $\tan 2^\circ < \tan 3^\circ$

پ) $\sin 3^\circ < \sin 2^\circ$

۶) مقدار عددی عبارت‌های زیر را پیدا کنید.

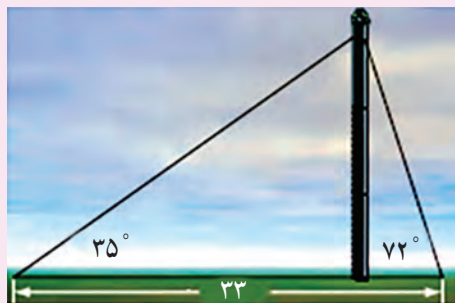
الف) $\frac{\sin 6^\circ + \tan 45^\circ - \cos 3^\circ}{1 + \sin 3^\circ}$

ب) $\frac{\tan 6^\circ + 2\cos 3^\circ - 2\sqrt{3}}{1 + \sin 6^\circ}$

پ) $\sin 3^\circ + \cos 3^\circ$

ت) $\frac{2\cos 3^\circ - 2\sin 3^\circ}{2\tan 45^\circ + 3\cos 6^\circ}$

ث) $1 - 2\sin 3^\circ$



۷) دو کابل فلزی یک برج مخابراتی را نگه داشته‌اند. زاویه بین زمین و کابل‌ها به ترتیب ۳۵ و ۷۲ درجه و فاصله بین محل اتصال دو کابل در زمین، ۳۳ متر است. طول هر یک از این کابل‌ها چقدر است؟

۸) با انجام محاسبات عددی، درستی روابط زیر را بررسی کنید:

الف) $\cos 6^\circ = 2\cos 3^\circ$ ب) $\sin 6^\circ < 2\sin 3^\circ$

پ) $\cos 6^\circ < 2\sin 3^\circ \cos 3^\circ$ ت) $\tan 6^\circ + \tan 3^\circ = \frac{2}{\sin 6^\circ}$

۱. بهادران، امیربهادر، محاسبات فنی ۱، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۹۲.
۲. یگانه عزیزی، رضا، هندسه (نقشه برداری)، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۹۲.
۳. نوری فرد، علی اکبر، مشایخی، حمیدرضا، مختاری، مالک، خلیل ارجمندی، محمداسماعیل، شجاعی اردکانی، مجید، محاسبات فنی ساختمان، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۹۴.
۴. داورپناه، مهدی، سیدحسینی، فرشاد، متینی، امیرحسین، کارگاه محاسبه و ترسیم، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۹۱.
۵. مجتهدی، حسین. آزمون های ورزشی، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۹۴.
۶. افتخار، رحیم، ریاضیات امور مالی، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۹۴.
۷. بخشعلی زاده، شهرناز، بروگردیان، ناصر، دهقانی ابیانه، زین العابدین، دیده ور، فرزاد، طاهری تنجانی، محمدتقی، عالمیان، وحید، مسگرانی، حمید، ریاضیات ۱، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۸۸.
۸. ایرانمنش، علی، جمالی، محسن، ربیعی، حمیدرضا، ریحانی، ابراهیم، شاهورانی، احمد، عالمیان، وحید، ریاضیات ۲، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۸۹.

9. Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics –course 2 .1nd Edition.

10. Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics –course 2 .2nd Edition.

11. Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics –course 2 .3rd Edition.

12. Moore-Harris, Beatrice; Bailey, Rhonda; Ott, Jack M.; Pelfrey, Ronald; Howard, Arthur C.; Price, Jack; Vielhaber, Kathleen; McClain, Kay. Mathematics application and concepts – course 2. McGraw-Hill. 2006.

13. Moore-Harris, Beatrice; Bailey, Rhonda; Ott, Jack M.; Pelfrey, Ronald; Howard, Arthur C.; Price, Jack; Vielhaber, Kathleen; McClain, Kay. Mathematics application and concepts – course 3. McGraw-Hill. 2006.

14. Barber, Dianne B. MATH IN CONTEXT: A Tool Kit for Adult Basic Skills Educators. Appalachian State University. NC Community College System. 2007.



دبیران محترم، صاحب نظران، همسرجویان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظراتی اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از

طریق نامه به شانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۷۵ - گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار tvoccd@roshd.ir

ارسال نمایند. وب‌گاه: www.tvoccd.medu.ir

دفترتالیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کارداش